فصل ۱
مجموعه ها

در ابتدا لازم است که در مورد مجموعه ها صحبت کنیم و از آن جهت که حیطهٔ کار ما، مجموعه های عددی است لذا این فصل را بطور ضمنی در اکثر نقاط کتاب استفاده خواهیم نمود و کاربرد عمدهٔ مجموعه ها، در مجموعه های عددی و نمودارها ظاهر خواهد شد.

۱.۱ تعاریف

دسته بندی اشیاء هرچند بی ارتباط با ریاضی بنظر می رسد، اما در واقع هر دسته از اشیاء در ریاضی به امری مجرد تبدیل و سپس مورد بحث قرار می گیرند. برای دسته بندی از نماد مجموعه کمک می گیریم که مفهومی فاقد تعریف است ولی بطور قابل ملاحظه‌ای دارای نمودی عینی و شهودی است.

۱.۱.۱ مجموعه

مجموعه از مفاهیم تعریف نشدهٔ ریاضی مانند خط و نقطه در هندسه است و مختصراً منظور از یک مجموعه دسته‌ای از اشیاء هستند که کاملاً مشخص اند. معمولاً مجموعه را با حروف بزرگ لاتین $A, B, C, \cdots$ نشان داده و هر شیء نسبت به مجموعه دو حالت دارد، یا متعلق به مجموعه است $a \in A$ و یا متعلق به مجموعه نیست $a \notin A$. به هر شیء درون مجموعه عضو مجموعه گوئیم. عضویت یک شیء به مجموعه را با $\in$ نشان می دهیم، برای مثال می نویسیم $a \in A$. اشیای درون مجموعه را با حروف کوچک $a, b, c, \cdots$ مشخص می کنیم.

از نظر تعداد عضوها، مجموعه‌ها به دو دستهٔ متناهی (محدود) و نامتناهی (نامحدود) تقسیم بندی می شوند مثلاً

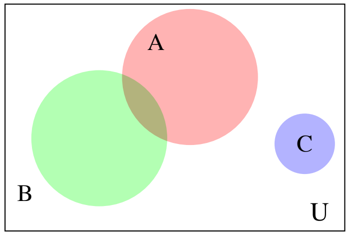
مجموعهٔ متناهی $A = \{a, b, c\}$
مجموعهٔ نامتناهی $B = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$

مجموعهٔ کلی مورد بحث را مجموعهٔ مرجع نامیده و با U نشان می دهیم. مجموعهٔ بدون عضو را مجموعهٔ تهی نامیم و آنرا با ϕ یا $\{\}$ مشخص می کنیم.

نمایش مجموعه با علائم ریاضی بصورت $C = \{x | P(x)\}$ است و می خوانیم «C مجموعه‌ای با اعضاء x است بقسمی که هر x دارای خاصیت $P(x)$ می باشد». متغیر x حرف یا علامتی است که جانشین هر عضو مجموعه شده و $P(x)$ بایستی خاصیتی کاملاً مشخص باشد. در زیر مجموعه‌ای را به دو صورت نمایش عضوی و نمایش ریاضی نشان می دهیم:

{ آ , ب , پ } = $\{x|$ یکی از سه حرف اول الفباست $x\}$

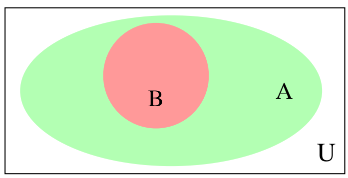
همچنین نمایش هندسی یک مجموعه توسط نمودار را نمودار ون یا اویلرـون گوئیم که اولین بار توسط ریاضیدان انگلیسی ون[۱] ابداع شد. در این نمایش، مجموعه ی مرجع را بشکل مستطیلی بزرگ و مجموعه های مورد نظر را با اشکال کوچکتر، درون آن نشان می دهیم.



۲.۱.۱ زیرمجموعه‌یک‌مجموعه

گوئیم A زیرمجموعهٔ B است اگر هر عضو A در B نیز باشد و می نویسیم $A \subseteq B$. تعریف ریاضی آن چنین است:

$$A \subseteq B \iff (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$



اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد می نویسیم $A \nsubseteq B$. عبارات زیر برای مجموعه های دلخواه A و B برقرار است:

آ) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آنگاه داریم $A = B$.

ب) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه داریم $A \subseteq C$.

پ) برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند C داریم $\phi \subseteq C \subseteq U$.

۲.۱ اعمال روی مجموعه‌ها

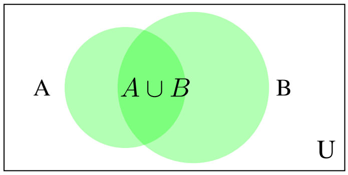
دو مجموعهٔ A و B می توانند توسط اجتماع، اشتراک و تفاضل درکنار هم قرار بگیرند که حاصل آن نیز مجموعه‌ای در حیطهٔ همان مجموعهٔ مورد بحث (یا مجموعهٔ مرجع) خواهد بود.

۱.۲.۱ اجتماع

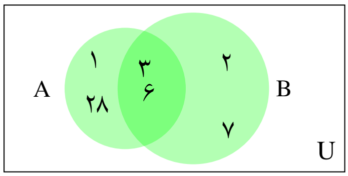
اجتماع دو مجموعه را با $A \cup B$ نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای که اعضایش همان اعضاء A است همراه با اعضاء B. به عبارت دیگر

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \;\text{یا}\; x \in B\}$$

[۱] John Venn (1834-1923)



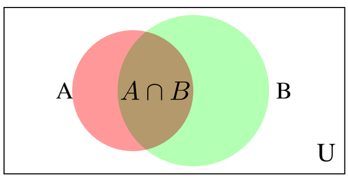
برای مثال اگر $A=\{۱,۳,۶,۲۸\}$ و $B=\{۲,۳,۶,۷\}$ دو مجموعه باشند سپس اجتماع آنها $A\cup B=\{۱,۲,۳,۶,۷,۲۸\}$ خواهد بود.



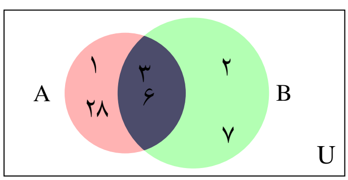
۲.۲.۱ اشتراک

اشتراک دو مجموعه را با $A\cap B$ نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای که اعضایش هم در A هستند و هم در B. یعنی

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ و } x\in B\}$$



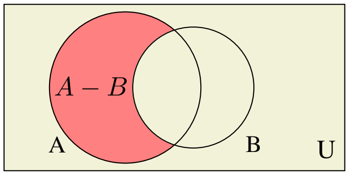
برای مثال اگر $A=\{۱,۳,۶,۲۸\}$ و $B=\{۲,۳,۶,۷\}$ دو مجموعهٔ قبل باشند، اشتراک آنها عبارتست از $A\cap B=\{۳,۶\}$.



۳.۲.۱ تفاضل

تفاضل دو مجموعه را با $A-B$ نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای از اعضاء A که در B نیستند. به عبارت ریاضی

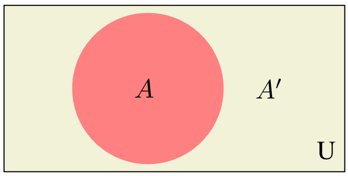
$$A-B=\{x\,|\,x\in A \text{ و } x\notin B\}$$



مثلاً دو مجموعهٔ $A = \{۱, ۳, ۶, ۲۸\}$ و $B = \{۲, ۳, ۶, ۷\}$ دارای تفاضل $A - B = \{۱, ۲۸\}$ هستند.

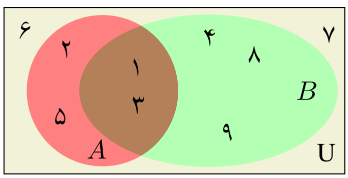
۴.۲.۱ متمم

متمم یک مجموعه A را با A' (آ پریم) نشان داده و عبارتست از مجموعهٔ تمام اعضائی از مرجع که در A نیستند، یعنی $A' = U - A$.



مثال ۱.۲.۱. فرض کنید $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ مجموعهٔ مرجع و A و B بصورت زیر باشند:

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۵\} \ , \ B = \{۱, ۳, ۴, ۸, ۹\}$$



مجموعه های زیر نتیجه می شوند:

(آ) $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۸, ۹\}$ ، (ب) $A \cap B = \{۱, ۳\}$
(پ) $A' = \{۴, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ ، (ت) $B' = \{۲, ۵, ۶, ۷\}$
(ث) $A \cap B' = \{۲, ۵\}$ ، (ج) $A - B = \{۲, ۵\}$

مطلب ۱.۱

برای هردو مجموعه مانند A و B داریم:

$$A - B = A \cap B'$$

این موضوع را می توان در قسمتهای (ث) و (ج) بالا مشاهده نمود.

مطلب ۱.۲

برای هر مجموعه دلخواه A داریم:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(آ)} & A \cap \phi = \phi \quad , & A \cup \phi = A \\
\text{(ب)} & A \cap U = A \quad , & A \cup U = U \\
\text{(پ)} & A \cap A = A \quad , & A \cup A = A \\
\text{(ت)} & A \cap A' = \phi \quad , & A \cup A' = U \\
\text{(ث)} & \phi' = U \quad , & U' = \phi
\end{array}
$$

علاوه بر این قوانین اولیه که در مطلب فوق بیان شده، چهار قانون مهم بین مجموعه ها برقرار است که بصورت زیرند:

مطلب ۱.۳

بین سه مجموعه دلخواه A، B و C روابط زیر برقرار است:

آ) قوانین جابجائی

$$
\begin{array}{l}
A \cup B = B \cup A \\
A \cap B = B \cap A
\end{array}
$$

ب) قوانین شرکتپذیری

$$
\begin{array}{l}
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)
\end{array}
$$

پ) قوانین پخشی

$$
\begin{array}{l}
(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\
(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)
\end{array}
$$

ت) قوانین دمورگان

$$
\begin{array}{l}
(A \cup B)' = A' \cap B' \\
(A \cap B)' = A' \cup B'
\end{array}
$$

مثال ۱.۲.۲. عبارت $(A - B) \cap B$ را ساده کنید.

حل. مطابق قوانین بالا می نویسیم:

$$
\begin{array}{rcll}
(A - B) \cap B & = & (A \cap B') \cap B & \text{طبق مطلب ۱,۱} \\
 & = & A \cap (B' \cap B) & \text{قانون شرکتپذیری} \\
 & = & A \cap \phi & \text{طبق مطلب ۱,۲(ت)} \\
 & = & \phi &
\end{array}
$$

■

مثال ۱.۲.۳. ثابت کنید $A \cup (A \cap B) = A$.

حل. مطابق مطلب ۱,۲ چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) && \text{طبق مطلب ۱,۲(ت)} \\ &= A \cap (U \cup B) && \text{قانون پخشی} \\ &= A \cap U && \text{طبق مطلب ۱,۲(ت)} \\ &= A && \text{طبق مطلب ۱,۲(ت)} \end{aligned}$$

■

تمرین ۱.۳. تمرینات تکمیلی.

۱. فرض کنید $U = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ مجموعهٔ مرجع و A و B بصورت زیر باشند.

$$A = \{۱, ۲, ۵\} \ , \ B = \{۱, ۳, ۴, ۵, ۷\}$$

مجموعه های زیر را یافته و با نمودار ون نیز آنها را نشان دهید.

$$B - A \ , \ B \cap A' \ , \ A' \ , \ B' \ , \ A \cup B \ , \ A \cap B \ , \ A \cap B'$$

با استفاده از یافته های بالا درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص نمائید:

$$\{۲\} \in A \ , \ ۱ \in A \ , \ ۳ \subseteq A \ , \ \{B\} \in A \ , \ B \in A \ , \ \{۲\} \in B - A$$

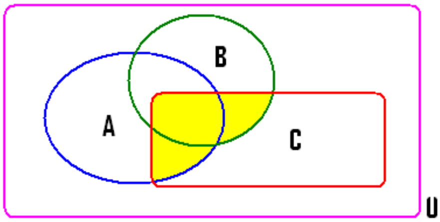
$$A \subset B \ , \ A - B \in A \ , \ A' \subset B' \ , \ A' \cup B = (B - A)' \ , \ B - A = A \cap B'$$

۲. فرض کنید $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی، مجموعهٔ مرجع بوده و همچنین $\mathbb{O} = \{۱, ۳, ۵, \cdots\}$ مجموعهٔ اعداد فرد و $\mathbb{E} = \{۲, ۴, ۶, \cdots\}$ مجموعهٔ اعداد زوج باشند. مجموعه های زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} &(\mathbb{E} \cup \mathbb{N}) - \mathbb{O} \ , \ (\mathbb{N} - \mathbb{E}) \cup \mathbb{E} \ , \ (\mathbb{E} \cup \mathbb{O}) - \mathbb{N} \ , \ (\mathbb{E} \cap \mathbb{O})' \cup \mathbb{E} \\ &\{x \in \mathbb{E} | x < ۹\} \ , \ \{x \in \mathbb{N} | ۲ \leq x < ۱۰\} \ , \ \{x \in \mathbb{E} | x < ۹, x > ۱۲\} \\ &\{x \in \mathbb{O} | x \notin \mathbb{N}\} \ , \ \{x \in \mathbb{O} | ۷ < x < ۲۰\} \ , \ \{x \in \mathbb{N} | x \notin \mathbb{O}\}' \end{aligned}$$

۳. عبارات زیر را ساده کنید:

$$\begin{array}{llll} (a) & (A - B)' \cup A & , (b) & (A' \cup B')' \cup (B - A) \\ (c) & (A - B)' \cap (A \cup B) & , (d) & (A' - B)' \cap B' \\ (e) & (A - B) \cup (A' \cap B') & , (f) & (A - B) \cup (A \cap B) \\ (g) & (A - B) \cap (B - A) & & \end{array}$$



شکل ۱.۱: نمودار ون تمرین ۶

۴. ثابت کنید:

$$\begin{array}{ll} (a) & (A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B \\ (b) & [(A\cup B)-B]\cup(A\cap B)=A \\ (c) & (A-B)-C=A-(B\cup C) \\ (d) & A\cap(A\cup B)=A \\ (e) & A\cup(A\cap B)=A \\ (f) & (A')'=A \end{array}$$

۵. برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A مقدار $A\cup(A\cap(A\cup(A\cap(A\cup(\cdots)))))$ چیست؟

۶. در نمودار ون شکل ۱.۱، قسمت زرد رنگ می تواند نمایش چه مجموعه‌ای باشد؟