

# فصل ۱

## مجموعه ها

در ابتدا لازم است که در مورد مجموعه ها صحبت کنیم و از آن جهت که حیطة کار ما، مجموعه های عددی است لذا این فصل را بطور ضمنی در اکثر نقاط کتاب استفاده خواهیم نمود و کاربرد عمده مجموعه ها، در مجموعه های عددی و نمودارها ظاهر خواهد شد.

### ۱.۱ تعاریف

دسته بندی اشیاء هرچند بی ارتباط با ریاضی بنظر می رسد، اما در واقع هر دسته از اشیاء در ریاضی به امری مجرد تبدیل و سپس مورد بحث قرار می گیرند. برای دسته بندی از نماد **مجموعه** کمک می گیریم که مفهومی فاقد تعریف است ولی بطور قابل ملاحظه ای دارای نمودی عینی و شهودی است.

#### ۱.۱.۱ مجموعه

مجموعه از مفاهیم تعریف نشده ریاضی مانند خط و نقطه در هندسه است و مختصراً منظور از یک مجموعه دسته ای از اشیاء هستند که کاملاً مشخص اند. معمولاً مجموعه را با حروف بزرگ لاتین  $A, B, C, \dots$  نشان داده و هر شیء نسبت به مجموعه دو حالت دارد، یا متعلق به مجموعه است  $a \in A$  و یا متعلق به مجموعه نیست  $a \notin A$ . به هر شیء درون مجموعه **عضو** مجموعه گوئیم. **عضویت** یک شیء به مجموعه را با  $\in$  نشان می دهیم، برای مثال می نویسیم  $a \in A$ . اشیای درون مجموعه را با حروف کوچک  $a, b, c, \dots$  مشخص می کنیم.

از نظر تعداد اعضا، مجموعه ها به دو دسته **متناهی (محدود)** و **نامتناهی (نامحدود)** تقسیم بندی می شوند مثلاً

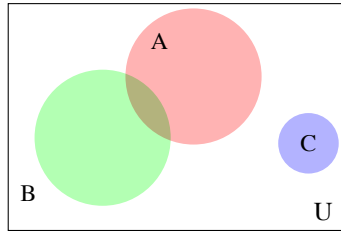
$$A = \{a, b, c\} \text{ مجموعه متناهی}$$
$$B = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ مجموعه نامتناهی}$$

مجموعه کلی مورد بحث را **مجموعه مرجع** نامیده و با  $U$  نشان می دهیم. مجموعه بدون عضو را **مجموعه تهی** نامیم و آنرا با  $\phi$  یا  $\{\}$  مشخص می کنیم.

نمایش مجموعه با علائم ریاضی بصورت  $C = \{x | P(x)\}$  است و می خوانیم « $C$  مجموعه ای با اعضاء  $x$  است بقسمی که هر  $x$  دارای خاصیت  $P(x)$  می باشد». **متغیر**  $x$  حرف یا علامتی است که جانشین هر عضو مجموعه شده و  $P(x)$  بایستی خاصیتی کاملاً مشخص باشد. در زیر مجموعه ای را به دو صورت **نمایش عضوی** و **نمایش ریاضی** نشان می دهیم:

$$\{x \mid \text{سه حرف اول الفباست}\} = \{p, b, \bar{a}\}$$

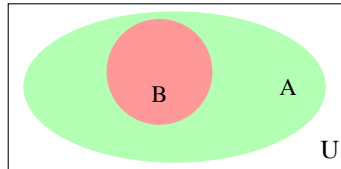
همچنین نمایش هندسی یک مجموعه توسط نمودار را نمودار ون یا اوپلر-ون گوئیم که اولین بار توسط ریاضیدان انگلیسی ون<sup>۱</sup> ابداع شد. در این نمایش، مجموعه‌ی مرجع را بشکل مستطیلی بزرگ و مجموعه‌های مورد نظر را با اشکال کوچکتر، درون آن نشان می‌دهیم.



### ۲.۱.۱ زیرمجموعه یک مجموعه

گوئیم  $A$  زیرمجموعه  $B$  است اگر هر عضو  $A$  در  $B$  نیز باشد و می‌نویسیم  $A \subseteq B$ . تعریف ریاضی آن چنین است:

$$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B)$$



اگر  $A$  زیرمجموعه  $B$  نباشد می‌نویسیم  $A \not\subseteq B$ . عبارات زیر برای مجموعه‌های دلخواه  $A$  و  $B$  برقرار است:

(آ) اگر  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$  آنگاه داریم  $A = B$ .

(ب) اگر  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$  آنگاه داریم  $A \subseteq C$ .

(پ) برای هر مجموعه دلخواه مانند  $C$  داریم  $\phi \subseteq C \subseteq U$ .

### ۲.۱ اعمال روی مجموعه‌ها

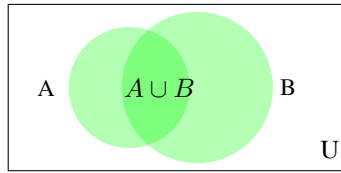
دو مجموعه  $A$  و  $B$  می‌توانند توسط اجتماع، اشتراک و تفاضل در کنار هم قرار بگیرند که حاصل آن نیز مجموعه‌ای در حیطه همان مجموعه مورد بحث (یا مجموعه مرجع) خواهد بود.

#### ۱.۲.۱ اجتماع

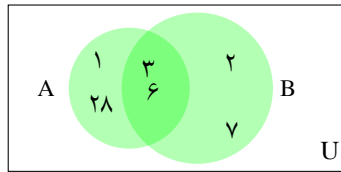
اجتماع دو مجموعه را با  $A \cup B$  نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای که اعضایش همان اعضاء  $A$  است همراه با اعضاء  $B$ . به عبارت دیگر

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

<sup>۱</sup> John Venn (1834-1923)



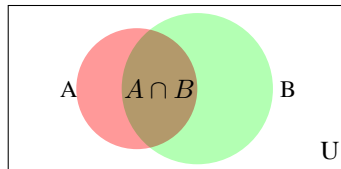
برای مثال اگر  $A = \{1, 3, 6, 28\}$  و  $B = \{2, 3, 6, 7\}$  دو مجموعه باشند سپس اجتماع آنها  $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 28\}$  خواهد بود.



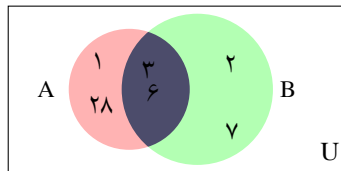
### ۲.۲.۱ اشتراک

اشتراک دو مجموعه را با  $A \cap B$  نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای که اعضایش هم در  $A$  هستند و هم در  $B$ . یعنی

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$



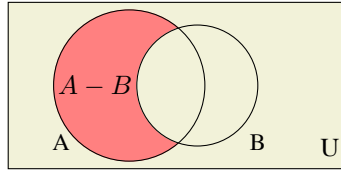
برای مثال اگر  $A = \{1, 3, 6, 28\}$  و  $B = \{2, 3, 6, 7\}$  دو مجموعه قبل باشند، اشتراک آنها عبارتست از  $A \cap B = \{3, 6\}$ .



### ۳.۲.۱ تفاضل

تفاضل دو مجموعه را با  $A - B$  نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای از اعضای  $A$  که در  $B$  نیستند. به عبارت ریاضی

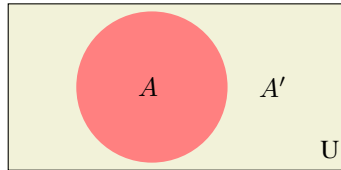
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$



مثلاً دو مجموعه  $A = \{1, 3, 6, 28\}$  و  $B = \{2, 3, 6, 7\}$  دارای تقاض  $A - B = \{1, 28\}$  هستند.

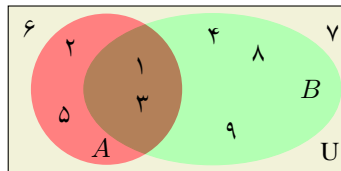
۴.۲.۱ متمم

متمم یک مجموعه  $A$  را با  $A'$  (آ پریم) نشان داده و عبارتست از مجموعه تمام اعضای از مرجع که در  $A$  نیستند، یعنی  $A' = U - A$ .



مثال ۱.۲.۱. فرض کنید  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  مجموعه مرجع و  $A$  و  $B$  بصورت زیر باشند:

$$A = \{1, 2, 3, 5\}, \quad B = \{1, 3, 4, 8, 9\}$$



مجموعه های زیر نتیجه می شوند:

- |     |                                      |     |                       |
|-----|--------------------------------------|-----|-----------------------|
| (آ) | $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$ | (ب) | $A \cap B = \{1, 3\}$ |
| (پ) | $A' = \{4, 6, 7, 8, 9\}$             | (ت) | $B' = \{2, 5, 6, 7\}$ |
| (ث) | $A \cap B' = \{2, 5\}$               | (ج) | $A - B = \{2, 5\}$    |

### مطلب ۱.۱

برای هر دو مجموعه مانند  $A$  و  $B$  داریم:

$$A - B = A \cap B'$$

این موضوع را می توان در قسمت‌های (ث) و (ج) بالا مشاهده نمود.

## مطلب ۱.۲

برای هر مجموعه دلخواه  $A$  داریم:

$$\begin{aligned} (\text{آ}) \quad A \cap \phi &= \phi, & A \cup \phi &= A \\ (\text{ب}) \quad A \cap U &= A, & A \cup U &= U \\ (\text{پ}) \quad A \cap A &= A, & A \cup A &= A \\ (\text{ت}) \quad A \cap A' &= \phi, & A \cup A' &= U \\ (\text{ث}) \quad \phi' &= U, & U' &= \phi \end{aligned}$$

علاوه بر این قوانین اولیه که در مطلب فوق بیان شده، چهار قانون مهم بین مجموعه‌ها برقرار است که بصورت زیرند:

## مطلب ۱.۳

بین سه مجموعه دلخواه  $A, B$  و  $C$  روابط زیر برقرار است:

(آ) قوانین جابجایی

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

(ب) قوانین شرکتپذیری

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

(پ) قوانین پخش

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

(ت) قوانین دمورگان

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B' \\ (A \cap B)' &= A' \cup B' \end{aligned}$$

مثال ۲.۲.۱. عبارت  $(A - B) \cap B$  را ساده کنید.

حل. مطابق قوانین بالا می نویسیم:

$$\begin{aligned} (A - B) \cap B &= (A \cap B') \cap B && \text{طبق مطلب ۱,۱} \\ &= A \cap (B' \cap B) && \text{قانون شرکتپذیری} \\ &= A \cap \phi && \text{طبق مطلب ۱,۲ (ت)} \\ &= \phi \end{aligned}$$

**مثال ۳.۲.۱.** ثابت کنید  $A \cup (A \cap B) = A$ .  
**حل.** مطابق مطلب ۱، ۲، چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) && \text{طبق مطلب ۱، ۲ (ت)} \\ &= A \cap (U \cup B) && \text{قانون پخشی} \\ &= A \cap U && \text{طبق مطلب ۱، ۲ (ت)} \\ &= A && \text{طبق مطلب ۱، ۲ (ت)} \end{aligned}$$



تمرین ۳.۱. تمرینات تکمیلی.

۱. فرض کنید  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  مجموعه مرجع و  $A$  و  $B$  بصورت زیر باشند.

$$A = \{1, 2, 5\}, \quad B = \{1, 3, 4, 5, 7\}$$

مجموعه های زیر را یافته و با نمودارون نیز آنها را نشان دهید.

$$B - A, B \cap A', A', B', A \cup B, A \cap B, A \cap B'$$

با استفاده از یافته های بالا درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص نمایید:

$$\{2\} \in A, 1 \in A, 3 \subseteq A, \{B\} \in A, B \in A, \{2\} \in B - A$$

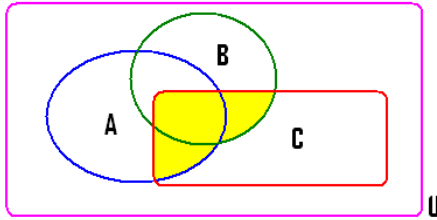
$$A \subset B, A - B \in A, A' \subset B', A' \cup B = (B - A)', B - A = A \cap B'$$

۲. فرض کنید  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه مرجع بوده و همچنین  $\mathbb{O} = \{1, 3, 5, \dots\}$  مجموعه اعداد فرد و  $\mathbb{E} = \{2, 4, 6, \dots\}$  مجموعه اعداد زوج باشند. مجموعه های زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} &(\mathbb{E} \cup \mathbb{N}) - \mathbb{O}, (\mathbb{N} - \mathbb{E}) \cup \mathbb{E}, (\mathbb{E} \cup \mathbb{O}) - \mathbb{N}, (\mathbb{E} \cap \mathbb{O})' \cup \mathbb{E} \\ &\{x \in \mathbb{E} | x < 9\}, \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x < 10\}, \{x \in \mathbb{E} | x < 9, x > 12\} \\ &\{x \in \mathbb{O} | x \notin \mathbb{N}\}, \{x \in \mathbb{O} | 7 < x < 20\}, \{x \in \mathbb{N} | x \notin \mathbb{O}\}' \end{aligned}$$

۳. عبارات زیر را ساده کنید:

$$\begin{aligned} (a) \quad &(A - B)' \cup A && (b) \quad (A' \cup B')' \cup (B - A) \\ (c) \quad &(A - B)' \cap (A \cup B) && (d) \quad (A' - B)' \cap B' \\ (e) \quad &(A - B) \cup (A' \cap B') && (f) \quad (A - B) \cup (A \cap B) \\ (g) \quad &(A - B) \cap (B - A) \end{aligned}$$



شکل ۱.۱: نمودار ون تمرین ۶

۴. ثابت کنید:

- (a)  $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$
- (b)  $[(A \cup B) - B] \cup (A \cap B) = A$
- (c)  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
- (d)  $A \cap (A \cup B) = A$
- (e)  $A \cup (A \cap B) = A$
- (f)  $(A')' = A$

۵. برای هر مجموعه دلخواه مانند  $A$  مقدار  $A \cup (A \cap (A \cup (A \cap (A \cup (\dots))))))$  چیست؟

۶. در نمودار ون شکل ۱.۱، قسمت زرد رنگ می‌تواند نمایش چه مجموعه‌ای باشد؟