فهرست مطالب

فهرست تصاویر

نمادگذاری:

صفحه ی مختلط .... $\mathbb{C}$

جزء حقیقی عدد مختلط .... $\mathbf{Re}$

جزء موهومی عدد مختلط .... $\mathbf{Im}$

قرص واحد .... $\mathbb{D}$

دایره واحد .... $\mathbb{T}$

رده ی تمام توابع تحلیلی .... $\mathbf{H}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز روی قرص واحد .... $\mathcal{S}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز ستارگون روی قرص واحد .... $\mathcal{S}^*$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز محدب روی قرص واحد .... $\mathcal{K}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز نزدیک_به_محدب روی قرص واحد .... $\mathcal{C}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز با جزء حقیقی مثبت روی قرص واحد .... $\mathbb{P}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز ستارگون یکنواخت روی قرص واحد .... $\mathcal{UST}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز محدب یکنواخت روی قرص واحد .... $\mathcal{UK}$

زیرترتیبی دو تابع تحلیلی .... $f \prec F$

پیچش دو تابع .... $f * F$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز روی قرص واحد .... $\mathcal{S}_H$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز ستارگون روی قرص واحد .... $\mathcal{S}_H^*$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز محدب روی قرص واحد .... $\mathcal{K}_H$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز نزدیک_به_محدب روی قرص واحد .... $\mathcal{C}_H$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز کاملاً ستارگون یکنواخت روی قرص واحد .... $\mathcal{UFS}_H^*$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز کاملاً محدب یکنواخت روی قرص واحد .... $\mathcal{UFK}$

اندیس رده برای توابع دو_تک ارز روی قرص واحد از هر رده ی خاص .... Σ

رده های مهم توابع تحلیلی دو_تک ارز

$\mathcal{S}_\Sigma(\alpha,\beta)$، $\mathcal{S}_\Sigma^*(\alpha)$، $\mathcal{S}_\Sigma^*[\beta]$، $\mathcal{H}_\Sigma(\alpha)$، $\mathcal{K}_\Sigma(\beta)$، $\mathcal{K}_\Sigma(\alpha,\beta)$، $\mathcal{N}_\Sigma^\mu(\alpha,\lambda)$، $\mathcal{B}_\Sigma(\alpha,\lambda)$، $\mathcal{B}_\Sigma(h,\alpha,\lambda)$، $\mathcal{B}_\Sigma[h,\beta,\lambda]$، $\mathcal{P}_\Sigma(\alpha,\mu)$.

فصل ۱

رده ی توابع تک ارز

نظریه توابع مختلط با قدمتی بیش از دو سده، از شاخه های مهم آنالیز بشمار رفته و با بحث روی نقاط صفحه و کنش آنها، الگوی بسیاری از مباحث و قضایای آنالیز بشمار می رود. از نظر تاریخی پیرامون این نظریه، بحث روی توابع تک ارز به ابتدای قرن بیستم بر می گردد، و آن هنگامی بود که طلایه داران آنالیز، مبانی و تعاریف تابع تک ارز یا تابع تک مقدار را بیان نموده و در این بین حدس بیبرباخ با عمری هفتاد ساله سرمایه بسیاری از پیشرفت ها در این مبحث بوده و پس از آن نظریه توابع همساز که خود منشعب از نظریه توابع تحلیلی است، راه خود را در این میان گشودند.

نظریه توابع مختلط طی شکل‌گیری اولیه با دیدی هندسی که مخصوصا مورد توجه دانشمندانی بود که تمایل به پیوند ریاضی با سایر علوم داشتند، مورد بحث و تفحص قرار داشت. بیان ویژگی های صفحه مختلط با بکارگیری ایده های هندسی توسط هندسه‌ـ دیفرانسیل دانهای نیمه اول قرن بیستم، باعث انگیزش بیشتر دانشمندان غیر ریاضی مخصوصا فیزیکدانها به این سمت بوده و چنین نگرشی از صفحه ی مختلط با آهنگی کندتر به امروز منتقل شده است.

مبحث توابع تک ارز هم اکنون نیز دستمایه ی بسیاری از نوشتجات طرفداران این نظریه است و با وجود تحقق حدس بیبرباخ، همچنان در زیر رده های مختلف مورد بحث بوده و گهگاه تعامل بین این زیررده ها را نیز مورد تحقیق و بررسی قرار می دهند. واضح است که بسیاری از خواص زیر رده های توابع تک ارز روی قرص واحد را می توان به توابع چندارزی و نیز دامنه های همبند چندگانه گسترش داد و از این لحاظ، یافته های مورد بررسی در توابع

تک ارز ارزشمندتر خواهند شد.

ما در ابتدا تعاریف شناخته شده و مورد نیازمان را در رده ی توابع تک ارز بازگو کرده و خواص لازم که در ادامه کار سرلوحه کارمان خواهد بود را از مقابل نظر خواهیم گذراند.

۱.۱ رده‌ی S

در این متن $\mathbb{C}$ عبارتست از صفحه مختلط، $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ قرص یکه باز[۱] و مرز آن که با $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ نمایش داده می شود. هر مجموعه باز همبند را که دامنه نامیده می شود با D یا Ω مشخص کرده و $\mathbf{H}(\Omega)$ نمایش مجموعه تمام توابع تحلیلی[۲] تعریف شده بر دامنه Ω است. تابع

$$\begin{cases} f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) \end{cases}$$

روی D تحلیلی است اگر f پیوسته بوده و u و v در معادلات کوشی ریمان[۳] صدق کنند یعنی $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$. این مطلب معادل با آن است که $f \in C^1(D)$ اگر توابع حقیقی $u = \mathbf{Re}\, f$ و $v = \mathbf{Im} f$ از متغیرهای حقیقی x و y دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته روی D باشند. یک نگاشت تحلیلی را همدیس[۴] گوئیم اگر مشتق آن هرگز صفر نشود. نگاشتهای همدیس وقتی که نقطه ی تقاطع دو منحنی را از دامنه انتقال می دهند، زاویه بین دو منحنی را بهمان اندازه به برد انتقال داده و جهت مثلثاتی آن را نیز به همان صورت حفظ می کنند، از اینرو حافظ زاویه و جهتند. قضیه زیر وجود چنین نگاشتهای همدیسی را بین دو دامنه تضمین می کند.

قضیه ۱.۱.۱. (قضیه نگاشت ریمان[۵] [۷۷]) گیرم G زیرمجموعه سره از صفحه مختلط باشد که همبند ساده[۶] است و $z_0 \in G$. سپس نگاشت تک ارز[۷] یکتای $\phi : G \to \mathbb{D}$ وجود دارد که $\phi(z_0) = 0$ و $\phi'(z_0) > 0$.

چنین نگاشتی که در قضیه صادق است نگاشت ریمان[۸] نامیده می شود. باید ذکر کنیم که منظور از توابع تک ارز در این نوشتار، توابعی تحلیلی و یک به یک بوده مگر در غیر این موارد تصریح شود. پس قضیه نگاشت ریمان وجود نگاشتی تک ارز بین هر دو دامنه همبند ساده

---

[۱] Open Unit Disk
[۲] Analytic (Holomorphic) functions
[۳] Cauchy-Riemann equations
[۴] Conformal
[۵] Riemann Mapping Theorem
[۶] Simply-Connected
[۷] Univalent, Schlicht, One-to-one
[۸] Riemann map

را تضمین می کند. چنین نگاشتهای تک ارزی دارای مشتق ناصفر بوده و در نتیجه همدیس اند. علاوه بر این می توان بحث توابع تک ارز را از هر دامنه به $\mathbb{D}$ منتقل کرد. گیریم $G \neq \mathbb{C}$ دامنه ای همبند ساده باشد. پس می توان تابع $F : G \to \mathbb{C}$ را با تابع $f := Fo\phi^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ که $\phi : G \to \mathbb{D}$ نگاشت ریمان است، جایگزین نمود. بنابراین در مطالعه ی توابع تحلیلی تک ارز، توجه خود را به نگاشتهای روی $\mathbb{D}$ معطوف می کنیم.

گیریم $\mathcal{A}$ رده[۹] ی توابعی به شکل

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

باشد که روی $\mathbb{D}$ تحلیلی اند. بعلاوه $\mathcal{S}$ رده ی توابع $f \in \mathcal{A}$ است که روی $\mathbb{D}$ تک ارز ند. رده ی $\mathcal{S}$ خانواده‌ای فشرده از توابع است که تحت مزدوج سازی[۱۰]، چرخش[۱۱]، انبساط[۱۲]، خودریختی قرص[۱۳][۱۴] و انتقال برد[۱۶] [۳۱] حفظ می شود. یک مثال از چنین توابعی در رده $\mathcal{S}$ تابع کوبه[۱۷]

$$k_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots \tag{2.1}$$

است. این تابع قرص $\mathbb{D}$ را به تمام صفحه منهای قسمتی از محور حقیقی منفی از $-\frac{1}{4}$ تا $-\infty$ می نگارد (شکل ۱.۱). این تابع نقش نگاشت اکستریمال[۱۸] را برای رده ی $\mathcal{S}$ بازی می کند. قضیه یک–چهارم کوبه[۱۹] چنین بیان می کند [۳۱]:

قضیه ۲.۱.۱. تصویر $\mathbb{D}$ تحت هر تابع تک ارز $f \in \mathcal{S}$ شامل قرصی به شعاع $\frac{1}{4}$ است.

در ۱۹۱۶ بیبرباخ[۲۰] قضیه ای ثابت کرد که نشان می داد ضریب دوم a_2 در بسط هر تابع $f \in \mathcal{S}$ می بایست حداکثر ۲ باشد یعنی $|a_2| \leqslant 2$ و حدس زد که برای هر تابع تک ارز $f \in \mathcal{S}$ می

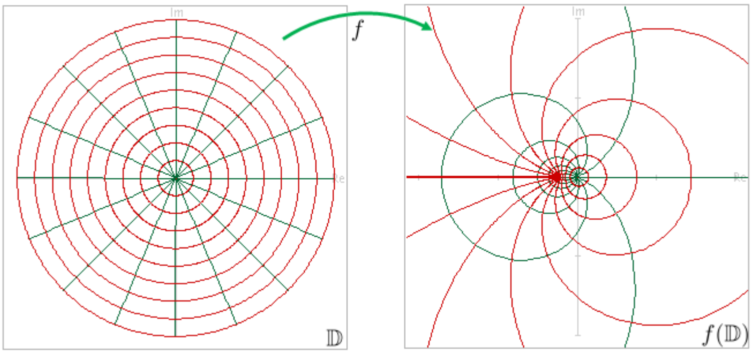
---

[۹] Class
[۱۰] Conjugation
[۱۱] Rotation
[۱۲] Dilation
[۱۳] Disc Automorphism
[۱۴] برای تابع تحلیلی موضعا تک ارز $f \in \mathcal{A}$، خودریختی قرص تابع $\Lambda_f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ است که

$$\Lambda_f(z) = \frac{f(\frac{z+z_0}{1+z\bar{z}_0}) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)}$$

برای $z_0 \in \mathbb{D}$. خانواده $\mathcal{F}$ پایای خطی[۱۵] اگر برای هر $f \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $\Lambda_f(z) \in \mathcal{F}$.

[۱۶] Range Transformation
[۱۷] Paul Koebe (1882-1945)
[۱۸] Extremal
[۱۹] Koebe
[۲۰] Bieberbach



شکل ۱.۱: تصویر $\mathbb{D}$ تحت تابع کوبه.

بایست $|a_n| \leqslant n$ برای هر $n \geqslant ۲$ی برقرار باشد. طی قرن بیستم این حدس مبنای مطالعات زیادی در رده ی توابع تک ارز شد و خواص بسیاری از این رده را آشکار نمود. همچنین بحث بر سر کران ضرایب و اثبات حدس بیبرباخ همچنان ادامه یافت و کران ضرایب نخست، چنین بدست آمد:

۱۹۱۶ $|a_۲| \leqslant ۲$ بیبرباخ [۱۲].

۱۹۲۳ $|a_۳| \leqslant ۳$ لاونر[۲۱] [۵۶].

۱۹۵۵ $|a_۴| \leqslant ۴$ قارابادیان[۲۲] و شیفر[۲۳] [۳۸].

۱۹۷۲ $|a_۵| \leqslant ۵$ پترسون[۲۴] و شیفر[۲۵] [۷۴].

۱۹۶۸ $|a_۶| \leqslant ۶$ پترسون[۲۶] [۷۳] و مستقلا اوزاوا[۲۷] [۷۲] در ۱۹۷۲.

بهترین نتیجه شناخته شده تا آن موقع از آن هورروویتس[۲۸] بود [۴۵] که ثابت کرد $|a_n| < ۱/۰۶۵۷n$. بالاخره در ۱۹۸۵ حدس بیبرباخ توسط دوبرانژ[۲۹] به اثبات رسید:

قضیه ۳.۱.۱ (دوبرانژ [۲۶]) برای هر $f \in \mathcal{S}$، ضرایب در رابطه $|a_n| \leqslant n$ برای هر n صدق می کنند.

برای نیل به این مقصود دوبرانژ، حدس میلین[۳۰] روی ضرایب لگاریتمی را ثابت کرد که حدس روبرتسون[۳۱] روی توابع تک ارز فرد را نتیجه می دهد و آن نیز نتیجه اش حدس روگوسینسکی[۳۲] روی توابع مطیع[۳۳] است که آن هم حدس بیبرباخ را نتیجه می دهد (ر.ک. [۳۱]، ص۱۹۷).

حدس میلین بیانگر آنست که ضرایب لگاریتمی γ_n از یک تابع تک ارز به شکل (۱.۱) که بصورت

$$\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = ۲\sum_{n=۱}^{\infty} \gamma_n z^n \qquad (۳.۱)$$

[۲۸] Horowitz

[۲۹] Louis de Branges

[۳۰] Milin conjecture (1971)

[۳۱] Robertson conjecture (1936)

[۳۲] Rogosinski conjecture (1943)

[۳۳] Subordinate Functions

تعریف می شود در نابرابری

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)\leqslant 0\ ,\ n=1,2,\cdots \tag{۴.۱}$$

صدق می کنند. واضح است که ضرایب لگاریتمی تابع کوبه $\gamma_n=\frac{1}{n}$ بوده و در حدس میلین صادقند. حدس روبرتسون نیز می گوید که ضرایب هر تابع تک ارز فرد نظیر $h(z)=z+c_3z^3+c_5z^5+\cdots$ در نابرابری

$$1+|c_3|^2+\cdots+|c_{2n-1}|^2\leqslant n$$

صدق می کنند [۵]. حدس روگوسینسکی در لم ۱.۲.۱ خواهد آمد.

۲.۱ تابعیت

گوئیم تابع f مطیع[۳۴] تابع g است و می نویسیم $f\prec g$ یا $f(z)\prec g(z)$ اگر تابع تحلیلی ω روی $\mathbb{D}$ چنان موجود باشد که $\omega(0)=0$، $|\omega(z)|<1$ و $f(z)=g(\omega(z))$ برای $z\in\mathbb{D}$. هنگامی که g تک ارز باشد، f مطیع تابع g است اگر $f(0)=g(0)$ و $f(\mathbb{D})\subset g(\mathbb{D})$.

لم ۱.۲.۱. (حدس روگوسینسکی [۳۱]) اگر $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ روی $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده و بازای $f\in\mathcal{S}$ ی، $f\prec g$ آنگاه $|b_n|\leqslant n$ که $n=1,2,\cdots$.

معمولا حدس روگوسینسکی را بعنوان تعمیم حدس بیبرباخ می شناسند. می توان ثابت کرد که اگر $f,g\in\mathcal{S}$ و $f\prec g$ سپس $f=g$.

۳.۱ توابع ستاره‌گون

تابع $f(z)$ را ستاره‌گون[۳۵] نامیم اگر بردش نسبت به مبداء ستاره‌گون باشد. از نظر هندسی، هر نقطه از برد $f(z)$ را می توان با پاره خطی به مبداء وصل نمود چنانکه تمام پاره خط در برد واقع شود [۷۷]. بعبارتی $\arg\{f(e^{i\theta})\}$ تابعی غیرنزولی از θ است یعنی

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(e^{i\theta})\}\geqslant 0$$

زیررده ی تمام توابع ستاره‌گون در $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{S}^*$ نشان می دهیم. بعلاوه $f(z)\in\mathcal{S}^*$ اگر و فقط اگر $\mathbf{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}>0$ و این نیز اگر و فقط اگر $z\frac{f'(z)}{f(z)}\prec\frac{1+z}{1-z}$. همچنین تابعی با خاصیت

[۳۴] Subordinate
[۳۵] Starlike

$\mathbf{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0$ روی $\mathbb{D}$ تک ارز خواهد شد. این موضوع نشان می دهد که

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{1-z}$$

یا $\log f(z) \prec \log\frac{z}{(1-z)^2}$ و در نتیجه نگاشت $k_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ نقش اکستریمال را برای ردهی S^* بازی می کند، و بنابراین $|a_n| \leqslant n$ برای هر $n \geqslant 2$ی برقرار است.

بوضوح حاصلضرب دو تابع ستاره‌گون تابعی است ستاره‌گون زیرا اگر $G(z) = f(z)g(z)$ پس $\log G(z) = \log f(z) + \log g(z)$ که با مشتقگیری $z\frac{G'(z)}{G(z)} = z\frac{f'(z)}{f(z)} + z\frac{g'(z)}{g(z)}$ برای $z \in \mathbb{D}$ و نتیجه حاصل می شود.

ستاره‌گونی خاصیتی ارثی برای نگاشتهای همدیس است یعنی اگر f در $\mathbb{D}$ تحلیلی و تک ارز با $f(0) = 0$ بوده و $\mathbb{D}$ را به ناحیه ای ستاره‌گون (نسبت به مبداء) بنگارد، آنگاه تصویر هر زیرقرص $|z| < r < 1$ نیز نسبت به مبداء ستاره‌گون خواهد بود.

فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ روی $\mathbb{D}$ ستاره‌گون باشد، سپس یک اندازه احتمالاتی یکتای μ هست که روی زیرمجموعه های بورل دایره یکه $\mathbb{T}$ تعریف می شود چنانکه

$$F(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = \int \frac{1+\overline{\gamma}z}{1-\overline{\gamma}z}d\mu(\gamma) \quad , \quad z \in \mathbb{D}$$

این نتیجه می دهد که

$$F(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int \overline{\gamma}^n d\mu(\gamma)$$

اکنون با تعریف دنباله $c_n = 2\int \overline{\gamma}^n d\mu(\gamma)$ می یابیم

$$F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

و

$$f(z) = z\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} c_n z^n\right)$$

دنباله های a_n و c_n با رابطه ی $(n+1)a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k c_{n-k}$ با هم مرتبطند که $n = 1, 2, 3, \cdots$ و $a_1 = 1$.

لم ۱.۳.۱. (بازیلویچ [11]) اگر $f(z)$ ستاره‌گون بوده $\gamma > 0$ آنگاه

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\gamma} \prec \frac{|f'(0)|^{\gamma}}{(1-z)^{2\gamma}}$$

روبرتسون[36] (۱۹۳۶) زیررده ای از S را معرفی نمود:

[36] Robertson

تعریف ۱.۳.۱. (روبرتسون [۸۵]) تابع تحلیلی $f(z)$ ستاره‌گون از مرتبه α نامیده می شود اگر

$$\mathbf{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \tag{۵.۱}$$

برای $z \in \mathbb{D}$ که $0 \leqslant \alpha < 1$ و مجموعه چنین توابعی را با $S^*(\alpha)$ می نمایانند.

در این تعریف مقدار پارامتر α محدود به $0 \leqslant \alpha < 1$ می شود زیرا ۵.۱ بازای $\alpha < 0$ لزوما در $\mathbb{D}$ تک ارز نخواهد بود. مارکز[۳۷]، روبرتسون و اسکات[۳۸] (۱۹۶۱) حاصلضرب توابع ستاره‌گون از مرتبه عددی مثبت را به شکل زیر مشخصه سازی کردند:

لم ۲.۳.۱. [۵۹] گیریم $f_n(z)$ برای $n = 1, 2, \cdots, N$ توابع ستاره‌گونی حداقل از مرتبه $1-d_n \geqslant 0$ باشند که $d_n \geqslant 0$ و فرض کنید $s_N = 1 - \sum_{n=1}^{N} d_n \geqslant 0$. آنگاه حاصلضرب

$$F_N(z) = z\prod_{n=1}^{N}\frac{f_n(z)}{z} \tag{۶.۱}$$

تابعی ستاره‌گون حداقل از مرتبه s_N است.

لم ۳.۳.۱. [۵۹] فرض کنید $f(z) \in S$ و $F(z) = z\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}$ به شرط $F'(0) = 1$ باشدآنگاه بازای $\alpha \geqslant 1$، $F(z)$ در $\mathbb{D}$ تک ارز و ستاره‌گون است اگر و فقط اگر $f(z)$ ستاره‌گون حداقل از مرتبه $1 - \frac{1}{\alpha}$ باشد.

این لم بازای $0 \leqslant \alpha < 1$ ما را به نتیجه مشابه $f(z) = z\left(\frac{F(z)}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ می رساند. لم زیر شرطی کافی را برای ستاره‌گونی برحسب ضرایب ارائه می کند:

لم ۴.۳.۱. [۵۹، ۹۷] تابع $f \in \mathcal{A}$ ستاره‌گون از مرتبه حداقل α است ($0 \leqslant \alpha < 1$)، اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n| \leqslant 1 \tag{۷.۱}$$

همچنین در صورتی که برای هر nی $a_n \leqslant 0$ باشد سپس (۷.۱) شرط لازم برای ستاره‌گون بودن $f(z)$ از مرتبه حداقل α هم خواهد بود.

مثال ۱.۳.۱. [۵۹] تابع $f_n(z) = z - \frac{z^3}{4n^2}$ بنابر لم ۴.۳.۱ ستاره‌گون از مرتبه

$$a_n = 1 - d_n = 1 - \frac{2}{4n^2 - 1}$$

است. چون $s_N = 0$ سپس لم ۲.۳.۱ نشان می دهد که

$$\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{4n^2}\right) \tag{۸.۱}$$

در $\mathbb{D}$ تک ارز و ستاره‌گون است.

مثال ۲.۳.۱. [۵۹] تابع $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$ که $\Gamma(z)$ تابع گامای اویلر[۳۹] است

[۳۷] Markes
[۳۸] Scott
[۳۹] Euler gamma function

بازای $|z| < r_{\circ}$ تک ارز و ستاره‌گون است که $r_{\circ}$ اندازه بزرگترین صفر منفی $\Gamma'(z)$ از $= -۰/۵۰ \cdots$ است و این نتیجه دقیق است.
باید خاطر نشان کنیم که شعاع ستاره‌گونی[۴۰] از $\tanh \frac{\pi}{۴} \approx ۰/۶۵۵ \cdots$ کمتر است. زیر رده ی دیگری از رده توابع ستاره‌گون توسط استانکویچ[۴۱] (۱۹۶۶) و برنان[۴۲] (۱۹۶۹) مستقلا معرفی شد:

تعریف ۲.۳.۱. [۱۱۰، ۱۵] تابع تحلیلی $f(z)$ قویا ستاره‌گون[۴۳] از مرتبه β خوانیم $(۰ < \beta \leqslant ۱)$ اگر در نابرابری

$$\left|\arg\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}\right| < \beta\frac{\pi}{۲}$$

برای $z \in \mathbb{D}$ صدق کند و رده چنین توابعی با $\mathcal{S}^*[\beta]$ نشان داده می شود.

۴.۱ تحدب

تابع تحلیلی $f(z)$ را محدب[۴۴] گوئیم اگر برد آن مجموعه ای محدب باشد. از نظر هندسی می توان برد $f(\mathbb{D})$ را محدب نامید بدین معنی که $\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\}$ تابعی غیرنزولی از θ باشد، یعنی

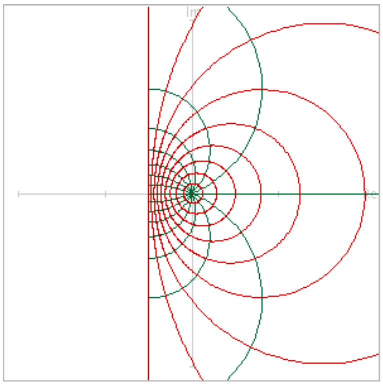
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\} \geqslant ۰$$

رده تمام توابع محدب در $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{K}$ نشان می دهیم [۷۷]. این رده بوده و همچنین $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و فقط اگر $\mathbf{Re}\left\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > ۰$ و این اگر و فقط اگر $۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \prec \frac{۱+z}{۱-z}$. واضح است که هر تابع محدب، ستاره‌گون است. تابع اکستریمال برای رده ی $\mathcal{K}$ عبارتست از $\ell(z) = \frac{z}{۱-z}$ (شکل ۲.۱).
تحدب خاصیتی ارثی در نگاشتهای همدیس دارد. پس اگر f در $\mathbb{D}$ تحلیلی و تک ارز بوده و قرص را به دامنه ای محدب بنگارد، سپس تصویر هر زیرقرص $|z| = r < ۱$ نیز محدب خواهد بود. بنابراین می توانیم بگوئیم که برای هر $r < ۱$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\} \geqslant ۰$$

که $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$. شعاع تحدب[۴۵] کلاس $\mathcal{S}$ برابر $۲ - \sqrt{۳} \approx ۰/۲۶۷ \cdots$ است.
قضیه ای از الکساندر[۴۶] (۱۹۱۵) رابطه ی میان رده های $\mathcal{S}^*$ و $\mathcal{K}$ را بخوبی نشان می دهد:

[۴۰] The radius of starlikeness
[۴۱] Stankiewicz
[۴۲] Brannan
[۴۳] Strongly Starlike
[۴۴] Convex
[۴۵] Radius of Convexity
[۴۶] Alexander



شکل ۲.۱: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت محدب $f = \dfrac{z}{1-z}$.

قضیه ۱.۴.۱. (قضیه الکساندر) گیریم f در $\mathbb{D}$ تحلیلی با نرمالسازی $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ باشد. آنگاه $f \in \mathcal{K}$ اگر و فقط اگر $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$.

یکی از نتایج مفید این قضیه، روابط زیر بین ستاره‌گونی و تحدب است. چنانچه اگر $f \in \mathcal{S}^*$ باشد سپس $g(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{z} dz$ محدب است. علاوه بر این

قضیه ۲.۴.۱. (روبرتسون) اگر $f \in \mathcal{S}^*$ سپس تابع $S(z) = \frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt$ در $\mathcal{S}^*$ است.

لم ۱.۴.۱. (سیلورمن [47] [۹۷]) فرض کنید $f(z)$ در $\mathbb{D}$ تحلیلی و به شکل (۱.۱) باشد. اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \leqslant 1$ سپس $f \in \mathcal{K}$.

زیررده ی $\mathcal{K}(\alpha)$ از $\mathcal{K}$ شامل تمام توابع محدب از مرتبه α توسط روبرتسون [۸۵] معرفی شد. برای $0 \leqslant \alpha < 1$ تابع $f(z)$ در $\mathcal{A}$ را محدب از مرتبه α[48] نامیم اگر

$$\mathbf{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \qquad (۹.۱)$$

بازای $z \in \mathbb{D}$. بدیهی است که برای $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$

$$\mathcal{K}(\beta) \subset \mathcal{K}(\alpha) \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S} \qquad (۱۰.۱)$$

تابع اکستریمال رده ی $\mathcal{K}(\alpha)$ عبارتست از

$$k_\alpha(z) = \begin{cases} \dfrac{(1-z)^{2\alpha-1}-1}{1-2\alpha} & ; \quad \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ -\log(1-z) & ; \quad \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (۱۱.۱)$$

که $\mathbb{D}$ را به طور تک ارز به نیم صفحه $\mathbf{Re}\{w\} > \alpha$ می نگارد (سوگاوا[49] [۱۱۲]). جالب است بدانیم که $\dfrac{1+(1-2\alpha)z}{1-z} = 1 + z\dfrac{k''_\alpha(z)}{k'_\alpha(z)}$ بوده و دارای ویژگی های $k_\alpha(0)=0$ و $k'_\alpha(0)=1$ است.

[47] Silverman
[48] Convex of Order α
[49] Sugawa

بوضوح $k_{\circ}(z)=\frac{z}{1-z}$ بوده و این نگاشت $\mathbb{D}$ را به طور تک ارز به نیم صفحه ی $\mathbf{Re}\{w\}>-\frac{1}{2}$ نگاشته و $\frac{k_{\circ}(z)}{z}=\frac{1}{1-z}$ نیز $\mathbb{D}$ را به طور تک ارز به نیم صفحه $\mathbf{Re}\{w\}>\frac{1}{2}$ می نگارد. طبق قضیه الکساندر (۱.۴.۱) می بینیم که:

$$f(z)\in\mathcal{K}(\alpha)\Longleftrightarrow zf'(z)\in\mathcal{S}^*(\alpha) \tag{۱۲.۱}$$

بعلاوه

لم ۲.۴.۱. (سیم [۵۰] و کوان [۵۱] [۹۸]) اگر $f(z)\in\mathcal{K}(\alpha)$ سپس $\mathbf{Re}\sqrt{f'(z)}>\frac{1}{2-\alpha}$. و بیشتر اینکه

لم ۳.۴.۱. (سیم و کوان [۹۸]) اگر $\mathbf{Re}\left\{1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}<\beta$ باشد که $1<\beta<2$ آنگاه $\mathbf{Re}\sqrt{f'(z)}<\frac{1}{2-\beta}$.

اما آیا ارتباطی میان رده های $\mathcal{S}^*(\alpha)$ و $\mathcal{K}(\alpha)$ وجود دارد؟. نخست اینکه تابع محدب نرمالشده در قرص واحد ستاره‌گون حداقل از مرتبه $\frac{1}{2}$ است [۶۰] و در ادامه نتیجه ای از مک‌گرگور [۵۲] بیان می کند که

لم ۴.۴.۱. [۱۱۶] گیریم $0\leqslant\alpha<1$ و $f\in\mathcal{K}(\alpha)$، سپس $f(z)\in\mathcal{S}^*(\delta(\alpha))$ است که

$$\delta(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1-2\alpha}{2^{2-2\alpha}-2} & ;\quad \alpha\neq\frac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{1}{2\log 2} & ;\quad \alpha=\frac{1}{2}.\end{cases} \tag{۱۳.۱}$$

لم ۵.۴.۱. [۹۷] تابع $f\in\mathcal{A}$ را محدب از مرتبه α با شرط $0\leqslant\alpha<1$ گوئیم اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|\leqslant 1 \tag{۱۴.۱}$$

لم ۶.۴.۱. (مارکس [۵۳] و استروهکر [۵۴] ۱۹۳۳) برای تابع محدب نرمالشده f روی قرص واحد $\mathbb{D}$ داریم $\frac{1}{1-z}\prec\frac{f(z)}{z}$ که $z\in\mathbb{D}$.

[۵۰] Sim
[۵۱] Kwon
[۵۲] MacGregor
[۵۳] Marx
[۵۴] Strohhacker

لم ۷.۴.۱. (بریکمن[۵۵]، هالنبک[۵۶]، مک گرگور و ویلکن[۵۷] ۱۹۷۳) فرض کنید $\frac{۱}{۲} \leqslant \alpha < ۱$ آنگاه برای $f \in \mathcal{K}(\alpha)$ داریم $\frac{k_\alpha(z)}{z} \prec \frac{f(z)}{z}$ که $z \in \mathbb{D}$، همچنین $\frac{k_\alpha(r)}{r} \leqslant \mathbf{Re}\,\frac{f(z)}{z} \leqslant \frac{k_\alpha(-r)}{-r}$ بازای $|z| = r < ۱$.

لم ۸.۴.۱. (سوگاوا و وانگ[۵۸] ۲۰۱۵ [۱۱۲]) فرض بگیرید که $۰ < \alpha < ۱$ سپس برای $f \in \mathcal{K}(\alpha)$ داریم $\frac{k_\alpha(z)}{z} \prec \frac{f(z)}{z}$ که $z \in \mathbb{D}$.

لم ۹.۴.۱. (استیر[۵۹] و رایت[۶۰] ۱۹۷۳) فرض کنید $f, g \in \mathcal{K}$ بوده و $\frac{\pi}{۴} \geqslant |\mathbf{Im}\frac{f(z)}{z}|$ و نیز $\frac{\pi}{۴} \geqslant |\mathbf{Im}\frac{g(z)}{z}|$ روی $\mathbb{D}$ برقرار باشد آنگاه $\frac{f+g}{۲} \in \mathcal{S}^*$.

لم ۱۰.۴.۱. (هالنبک و روشه ویه[۶۱] ۱۹۷۵ [۴۳]) برای $f, g \in \mathcal{K}$ با شرط $f''(۰) = g''(۰) = ۰$ داریم $\frac{f+g}{۲} \in \mathcal{S}^*$.

در واقع آنها ثابت کردند که برای $f \in \mathcal{K}$ با شرط $f''(۰) = ۰$ که در $\frac{\pi}{۴} \geqslant |\mathbf{Im}\frac{f(z)}{z}|$ صدق می کند داریم

$$\frac{f(z)}{z} \prec H_۱(z) := \frac{۱}{۲\sqrt{z}} \log \frac{۱+\sqrt{z}}{۱-\sqrt{z}} = \sum_{۰}^{\infty} \frac{z^n}{۲n+۱}. \qquad (۱۵.۱)$$

لم ۱۱.۴.۱. (سوگاوا و وانگ ۲۰۱۵ [۱۱۲]) برای $f, g \in \mathcal{K}(\frac{۳}{۵})$ داریم $\frac{f+g}{۲} \in \mathcal{S}^*$.

لم ۱۲.۴.۱. [۵۹] اگر $f, g \in \mathcal{K}$ آنگاه $\frac{fg}{z} \in \mathcal{S}^*$. این حاصلضرب ستاره‌گون از هیچ مرتبه مثبتی نیست زیرا که $f(z) = g(z) = \frac{z}{۱+z}$.

تعریف ۱.۴.۱. تابع تحلیلی $f(z)$ را قویا محدب از مرتبه β[۶۲] $(۰ < \beta \leqslant ۱)$ گوئیم اگر در نابرابری زیر صدق کند

$$\left| \arg\left\{ ۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \right| < \beta\frac{\pi}{۲}$$

که $z \in \mathbb{D}$ و مجموعه ی چنین توابعی را با $\mathcal{K}^*[\beta]$ نشان می دهیم.

داریم

$$f(z) \in \mathcal{K}[\beta] \Longleftrightarrow zf'(z) \in \mathcal{S}^*[\beta] \qquad (۱۶.۱)$$

---

[۵۵] Brickman

[۵۶] Hallenbeck

[۵۷] Wilken

[۵۸] Wang

[۵۹] Styer

[۶۰] Wright

[۶۱] Ruscheweyh

[۶۲] Strongly Convex of Order β

نانوکاوا[۶۳] (۱۹۹۳) ثابت کرد که برای $0 < \beta < 1$، اگر $f(z) \in \mathcal{K}[\delta(\beta)]$ آنگاه $f(z) \in \mathcal{S}^*[\beta]$ که در آن

$$\delta(\beta) = \beta + \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{\beta n(\beta) \sin \frac{(1-\beta)\pi}{2}}{m(\beta) + \beta n(\beta) \cos \frac{(1-\beta)\pi}{2}}$$

جائی که $m(\beta) = (1+\beta)^{\frac{1+\beta}{2}}$ و $n(\beta) = (1-\beta)^{\frac{\beta-1}{2}}$.

لم ۱.۴.۱۳. (اومی زاوا[۶۴] [۱۱۵]) فرض کنید $f \in \mathcal{A}$ و $f'(z) \neq 0$ روی $|z| = 1$ باشد. اگر رابطه‌ی $\int_0^{2\pi} \left|\mathbf{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}\right| d\theta < 4\pi$ بازای $|z| = 1$ برقرار باشد آنگاه $f(z)$ در یک جهت محدب بوده و در نتیجه $f(z)$ در $|z| \leqslant 1$ تک ارز خواهد شد.

بدین طریق تحدب در یک جهت نیز مطرح گردید و تعریف زیر مفید واقع شد:

تعریف ۱.۴.۲. دامنه D را محدب در جهت α[۶۵] نامیم $(0 \leqslant \alpha < \pi)$ اگر اشتراک آن با هر خطی که از مبداء و نقطه ی $e^{i\alpha}$ می گذرد تهی یا یک بازه باشد.

بدین تعریف، تابع f را در D محدب در جهت α گوئیم اگر $f(\mathbb{D})$ محدب در جهت α باشد.

در مفهومی عمومی تر گوئیم f محدب در یک جهت است اگر αی باشد چنانکه f محدب در جهت α شود. گوئیم دامنه $D \subset \mathbb{C}$ محدب در جهت افقی[۶۶] (CHD) است، اگر طبق تعریف فوق اشتراک آن با هر خط افقی، تهی یا همبند باشد.

لم ۱.۴.۱۴. (پومرنکه[۶۷] [۷۶]) فرض کنید f در $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده، $f(0) = 0$ و $f'(0) \neq 0$ باشد و گیریم

$$\phi(z) = \frac{z}{(1 + ze^{i\theta})(1 + ze^{-i\theta})}$$

که $\theta \in \mathbb{R}$. اگر

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{\phi(z)}\right\} > 0 \quad , \quad z \in \mathbb{D}$$

سپس f محدب در جهت افقی است.

لواندوفسکی[۶۸]، میلر[۶۹] و سوتکویچ[۷۰] (۱۹۷۴) [۵۳] رده ی توابع γـ ستاره‌گون را معرفی نمودند که با نماد $\mathcal{G}(1, \gamma)$ نمایش داده شده و اعضای آن در شرط زیر صادقند

$$\mathbf{Re}\left\{\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}\right\} > 0 \quad , \quad z \in \mathbb{D}$$

---

[۶۳] Nunokawa
[۶۴] Umezawa
[۶۵] Convex in the Direction of α
[۶۶] Convex in the horizontal direction
[۶۷] Pommerenke
[۶۸] Lewandowski
[۶۹] Miller
[۷۰] Złotkiewicz

نانوکاوا و سوکول[۷۱] [۷۱] این رده را به $\mathcal{G}(\alpha,\gamma)$ گسترش داده و آن را توابع γـ قویا ستاره‌گون از مرتبه α[۷۲] نامیدند که شامل توابع $f\in\mathcal{A}$ با خاصیت

$$\left|\arg\left\{\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}\right\}\right|<\alpha\frac{\pi}{2}\quad,\quad z\in\mathbb{D} \tag{1.17}$$

هستند که $0<\alpha\leqslant 1$، $\gamma>0$ و $f(z)$ با قید $f(z)f'(z)\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\neq 0$ برای $z\in\mathbb{D}-\{0\}$ انتخاب می شود. نکته اینکه $\mathcal{G}(0,\beta)\subset\mathcal{S}^*[\beta]$ و

قضیه ۱.۴.۳. گیریم $0<\alpha\leqslant 1$، $\gamma>0$ و $f\in\mathcal{A}$ بشکل (۱.۱) باشد که در (۱.۱۷) صدق می کند. اگر معادله ی نسبت به x :

$$x+\frac{2\gamma}{\pi}\tan^{-1}\frac{xn(x)\sin\frac{(1-x)\pi}{2}}{m(x)+xn(x)\cos\frac{(1-x)\pi}{2}}=\alpha \tag{1.18}$$

با $m(x)=(1+x)^{\frac{1+x}{2}}$ و $n(x)=(1-x)^{\frac{x-1}{2}}$، دارای جواب $\beta\in(0,1]$ باشد آنگاه $f\in\mathcal{G}(\alpha,\gamma)$.

قضیه ۱.۴.۴. برای $0<\alpha\leqslant 1$، $0<\gamma\leqslant 1$ و $f\in\mathcal{A}$ بفرم (۱.۱) که در (۱.۱۷) صدق می کند. اگر معادله (۱.۱۸) دارای جواب $0<\alpha_0\leqslant 1$ باشد، آنگاه $f\in\mathcal{K}[\frac{(1-\gamma)\alpha_0+\alpha}{\gamma}]$.

نتیجه ۱.۴.۱. فرض کنید که معادله (۱.۱۸) دارای جواب $0<\alpha_0<\alpha\leqslant 1$ است. اگر $0<\delta<\gamma$ سپس $\mathcal{G}(\alpha,\gamma)\subset\mathcal{G}(\alpha,\delta)$.

قضیه ۱.۴.۵. فرض بگیرید $0<\alpha\leqslant 1$، $\gamma<0$ و $f\in\mathcal{A}$ به شکل (۱.۱) است و در (۱.۱۷) صدق می کند. اگر $\beta=\frac{\alpha-\gamma}{1-\gamma}$ آنگاه $f\in\mathcal{S}^*[\beta]$.

سیم و کوان [۹۸] رده ی زیر را معرفی کردند (۲۰۱۳):

تعریف ۱.۴.۳. برای اعداد حقیقی α و β با شرط $0\leqslant\alpha<1<\beta$، تابع $f(z)\in\mathcal{A}$ متعلق به رده ی $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ است اگر $f(z)$ در نابرابری زیر صدق نماید

$$\alpha<\mathbf{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)<\beta\quad,\qquad z\in\mathbb{D} \tag{1.19}$$

بوضوح $\mathcal{K}(\alpha,\beta)\subset\mathcal{K}$ بوده و (۱.۲۳) این شروط معادل را در اختیار ما قرار می دهد:

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\prec\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\quad,\quad z\in\mathbb{D},\ 0\leqslant\alpha<1 \tag{1.20}$$

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\prec\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\quad,\quad z\in\mathbb{D},\ \beta>1 \tag{1.21}$$

---
[۷۱] Sokol

[۷۲] γ-Strongly Starlike Functions of Order α

در این مورد آنها از تابع

$$p(z)=1+i\frac{\beta-\alpha}{\pi}\log\left(\frac{1-e^{2\pi i\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}}z}{1-z}\right)\quad,\quad z\in\mathbb{D} \qquad (۲۲.۱)$$

استفاده کردند که $\mathbb{D}$ را به نوار محدب $\alpha<\mathbf{Re}\,w<\beta$ می نگارد و توسط کوروکی[۷۳] و اووا[۷۴] [۵۲] معرفی شد، بنابراین

لم ۱۵.۴.۱. بازای اعداد حقیقی α و β با محدودیت $0\leqslant\alpha<1<\beta$، تابع $f(z)\in\mathcal{A}$ در رده ی $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ قرار می گیرد اگر و فقط اگر

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\prec 1+i\frac{\beta-\alpha}{\pi}\log\left(\frac{1-e^{2\pi i\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}}z}{1-z}\right)\quad,\quad z\in\mathbb{D} \qquad (۲۳.۱)$$

و برآورد کران ضرایب را برای $f\in\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ بشکل زیر بدست می دهد

$$|a_n|\leqslant\begin{cases}\frac{1}{2}|B_1| & ;\quad n=2,\\ \frac{|B_1|}{n(n-1)}\prod_{k=1}^{n-2}\left(1+\frac{|B_1|}{k}\right) & ;\quad n=3,4,\cdots.\end{cases} \qquad (۲۴.۱)$$

که

$$|B_1|=\frac{2(\beta-\alpha)}{\pi}\sin\frac{(1-\alpha)\pi}{\beta-\alpha}.$$

لم ۱۶.۴.۱. برای اعداد حقیقی α و β به شرط $0\leqslant\alpha<1<\beta<2$، اگر $f\in\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ سپس

$$\frac{1}{2-\alpha}<\mathbf{Re}\sqrt{f'(z)}<\frac{1}{2-\beta}$$

۵.۱ رده ی $\mathbb{P}$

این خانواده از توابع شامل تمام توابع مانند $\mathfrak{p}$ است که در $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده و $\mathbf{Re}\,\mathfrak{p}(z)>0$ و بعلاوه در قرص واحد بصورت $\mathfrak{p}(z)=1+c_1z+c_2z^2+\cdots$ باشند. فرمول نمایش هرگلوت[۷۵] نشان می دهد که

لم ۱.۵.۱. $\mathfrak{p}(z)\in\mathbb{P}$ اگر و فقط اگر $p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)$ چنانکه γ صعودی بوده و $\gamma(2\pi)-\gamma(0)=1$.

[۷۳] Kuroki
[۷۴] Owa
[۷۵] Herglotz

لم ۱.۵.۲. (کاراتئودوری[۷۶] ([۷۷]) اگر $\mathfrak{p}(z) \in \mathbb{P}$ سپس $|c_n| \leqslant ۲$ برای هر n.
تابع $\mathfrak{p}_\circ(z) = \dfrac{۱+z}{۱-z}$ تابع اکستریمال برای این رده بوده که تابعی محدب است. بدیهی است که

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow z\frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathbb{P}$$

۱.۶ نزدیک به محدب

یک دامنه D را نزدیک به محدب[۷۷] گوئیم اگر مکمل D را بتوان با اجتماعی از نیمخط های نامتقاطع نشان داد. تابع تک ارز f در $\mathbb{D}$ را نزدیک به محدب گوئیم اگر برد آن $f(\mathbb{D})$ دامنه ای نزدیک به محدب باشد. چنین تعریف هندسی، دارای صورت تحلیلی زیر است:

تعریف ۱.۶.۱. یک تابع به شکل (۱.۱) را نزدیک به محدب گوئیم اگر تابع ستاره‌گونی مانند g و تابع $h \in \mathbb{P}$ چنان وجود داشته باشد که

$$zf'(z) = g(z)h(z) \quad , \quad z \in \mathbb{D}$$

این رده توسط کاپلان[۷۸] (۱۹۵۲) معرفی شد و وی ثابت کرد که زیرمجموعه توابع تک ارز است. زیررده نزدیک به محدب از $\mathcal{S}$ را که شامل تمام توابع نزدیک به محدب تک ارز باشند را $\mathcal{C}$ می نمایانیم. بوضوح $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S}$.
تعریف معادل دیگری بیان می کند که تابع $f(z)$ را نزدیک به محدب گوئیم اگر تابع ستاره‌گون g باشد که

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} > \circ \quad , \quad z \in \mathbb{D} \qquad (۱.۲۵)$$

این معادل با آن است که بگوئیم تابع محدب تک ارز (و نه لزوما نرمالشده) hی باشد که

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{f'(z)}{h'(z)}\right\} > \circ \quad , \quad z \in \mathbb{D} \qquad (۱.۲۶)$$

بنابر قضیه نوشیرو[۷۹]–ورشاوسکی[۸۰] ([۳۱]، ص ۴۷)، هر تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ با $\mathbf{Re}\, f'(z) > \circ$ تک ارز و نزدیک به محدب است. با انتخاب مناسبی از g در (۱.۲۵) می توان زیررده ای از توابع نزدیک محدب

$$\mathbf{Re}\left\{\prod_{j=۱}^{n}(z - e^{i\alpha_j})^{\sigma_j} f'(z)\right\} > \circ \qquad (۱.۲۷)$$

---
[۷۶] Caratheodory
[۷۷] Close-to-Convex
[۷۸] Kaplan
[۷۹] Noshiro
[۸۰] Warschawski

را یافت که $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \cdots \le \alpha_n \le 2\pi$، $0 \le \sigma_j \le 1$ و $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \le 2$.

لم ۱.۶.۱. (کاپلان [۳۱]) گیریم f در $\mathbb{D}$ تحلیلی و موضعا تک ارز باشد و در شرط

$$\mathbf{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > -\frac{1}{2}$$

بازای تمام $z \in \mathbb{D}$ صدق نماید، سپس f در $\mathbb{D}$ تک ارز و نزدیک به محدب است.

تعریف ۲.۶.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ را نزدیک به محدب از مرتبه α[۸۱] گوئیم $(0 \leqslant \alpha < 1)$ اگر بازای تابع محدب تک ارز h روی $\mathbb{D}$ (که این تابع لزوما نرمالشده نیست) داشته باشیم

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{f'(z)}{h'(z)}\right\} > \alpha \quad , \quad z \in \mathbb{D}$$

رده ی تمام چنین توابعی را با $\mathcal{C}(\alpha)$ نشان می دهیم.

۷.۱ خانواده بازیلویچ

این رده تعمیمی از رده توابع نزدیک به محدب بحساب می آید. با فرض اینکه $g(z)$ در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون بوده و $\mathfrak{p}$ تابعی تحلیلی در قرص واحد با شرط $\mathbf{Re}\ \mathfrak{p}(z) > 0$ باشد. سپس بازیلویچ[۸۲] نشان داد که تابع

$$f(z) = \left(\int_0^z \mathfrak{p}(\zeta)g(\zeta)^{\alpha}\zeta^{i\beta-1}d\zeta\right)^{\frac{1}{\alpha+i\beta}} \qquad \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R} \tag{۲۸.۱}$$

در $\mathbb{D}$ تحلیلی و تک ارز است [۱۱]. رده ای که از این توابع ایجاد می شود را با $B(\alpha+i\beta)$ نشان می دهیم. مسلما $B(1)$ رده ی توابع نزدیک به محدب نرمال شده است. در [۳۳] نشان داده شده که اگر $f(z) \in B(\alpha+i\beta)$ با $\mathfrak{p}(z) = 1$ آنگاه $f(z)$ باید در رابطه

$$\mathbf{Re}\left\{(\alpha - 1 + i\beta)z\frac{f'(z)}{f(z)} + (1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)})\right\} > 0 \tag{۲۹.۱}$$

برای $z \in \mathbb{D}$ صدق کند. بالعکس اگر $f(z)$ در $\mathbb{D}$ با شروط $f(0) = 0$ و $\frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$ برای $z \in \mathbb{D}$ تحلیلی بوده و در (۱.۲۹) صدق نماید سپس $f(z)$ را می توان به شکل (۱.۲۸) بازای $\mathfrak{p}(z) = 1$ نوشت.

[۸۱] Close-to-Convex of order α

[۸۲] Bazilevič

۸.۱ مارپیچ گون ها

تعمیمی از ستاره‌گونها وجود دارد که بعنوان مارپیچ‌گون[۸۳] شناخته می شوند و در ۱۹۳۳ توسط اسپاسک[۸۴] معرفی شد [۱۰۰]. یک مارپیچ لگاریتمی، یک منحنی در صفحه مختلط به شکل $w = w_0 e^{-\lambda t}$ است که $t \in \mathbb{R}$ بوده، $w_0 \neq 0$ و λ ثابتهای مختلط با شرط $\mathbf{Re}\,\lambda \neq 0$ هستند. بدون کاستن از کلیت می توان با فرض $\lambda = e^{i\alpha}$ که $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ منحنی را αـ مارپیچ گون[۸۵] نامید.

دامنه D شامل مبداء را αـ مارپیچ گون نامیم اگر برای هر نقطه $w_0 \neq 0$ در D، قوس αـ مارپیچی از w_0 تا مبداء، کاملا در D قرار گیرد. یک دامنه αـ مارپیچ گون همبند ساده است.

تابع $f \in \mathcal{A}$ را αـ مارپیچ گون نامیم اگر بردش αـ مارپیچ گون باشد. تابع مارپیچ گون است اگر بازای یα αـ مارپیچ گون باشد. توابع 0ـ مارپیچ گون بوضوع ستاره‌گونند. مارپیچ‌گونی[۸۶] را می توان با شرطی تحلیلی که تاحدودی همان تعمیم شرط ستاره‌گونی است مشخصه سازی نمود:

قضیه ۱.۸.۱. [۳۱] گیریم $f \in \mathcal{A}$ با $f'(z) \neq 0$ بازای $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ بوده و $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ باشد. سپس f ، αـ مارپیچگون است اگر و تنها اگر

$$\mathbf{Re}\left\{e^{-i\alpha} z \frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \tag{۳۰.۱}$$

رده ی تمام توابع αـ ستاره‌گون در $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{S}^{sp}(\alpha)$ نشان می دهیم. قضیه فوق بیان می کند که (۳۰.۱) شرطی کافی برای تک ارزی است. مشاهدات هندسی نشان می دهد که برای $\alpha \neq 0$،یک تابع αـ مارپیچ گون لازم نیست تابع نزدیک به محدب[۸۷] باشد. یک مثال تابع

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2e^{i\alpha}\cos\alpha}} \in \mathcal{S}^{sp}(\alpha) \tag{۳۱.۱}$$

است که $\mathbb{D}$ را به مکمل قوسی از یک αـ مارپیچ می نگارد. این تابع همان نقشی را بازی می کند که تابع کوبه[۸۸] برای توابع ستاره‌گون بازی کرده و در واقع اکستریمال برای توابع αـ مارپیچ گون است. از طرفی تابع نزدیک به محدب لازم نیست مارپیچ گون باشد مانند تابع

$$f(z) = \frac{z - z^2\cos\phi}{(1-e^{i\phi}z)^2}, \quad \cos\phi \neq 0 \tag{۳۲.۱}$$

[۸۳] Spirallike Class
[۸۴] Spacek
[۸۵] α-spiral
[۸۶] Spirallikeness
[۸۷] Close-to-convex function
[۸۸] Koebe function

که $\mathbb{D}$ را به مکمل یک نیمخط غیر شعاعی می نگارد. کولشرسترا[۸۹] [۵۰] زیررده ی $\mathcal{S}^{sp}(\alpha,\gamma)\subset \mathcal{S}^{sp}(\alpha)$ از توابع γـ مارپیچ گون از مرتبه α را چنین معرفی کرد:

تعریف ۱.۸.۱ [۵۰] گیریم $f\in\mathcal{A}$ با شرط $f'(z)\neq 0$ بازای $z\in\mathbb{D}-\{0\}$ باشد. سپس $f\in\mathcal{S}^{sp}(\alpha,\gamma)$ اگر و تنها اگر اعداد حقیقی $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ و $0\leqslant\gamma<1$ چنان موجود باشند که

$$\mathbf{Re}\left\{e^{i\alpha}z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}>\gamma\cos\alpha\,,\quad z\in\mathbb{D} \tag{۳۳.۱}$$

۹.۱ رده ی $\mathcal{T}$

رده ی $\mathcal{T}$ شامل تمام اعضائی از $\mathcal{S}$ است که ضرایب ناصفر آن از دومی بعد منفی اند، یعنی تابعی تحلیلی و تک ارز f در $\mathcal{T}$ است اگر به شکل

$$f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n$$

باشد. متناظر با این مجموعه، $\mathcal{T}^*(\alpha)$ و $\mathcal{TK}(\alpha)$ زیر رده هائی از $\mathcal{T}$ خواهند بود که به ترتیب ستاره‌گون و محدب از مرتبه α هستند. بدین ترتیب $\mathcal{T}=\mathcal{T}^*(0)$.

لم ۱.۹.۱ [۹۷] تابع $f=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n$ در $\mathcal{T}^*(\alpha)$ است اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leqslant 1$.

لم ۲.۹.۱ [۹۷] تابع $f=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n\in\mathcal{A}$ در $\mathcal{T}^*(\alpha)$ است (که $0\leqslant\alpha<1$) اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|\leqslant 1 \tag{۳۴.۱}$$

لم ۳.۹.۱ [۹۷] اگر $f=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n\in\mathcal{T}^*(\alpha)$ به شرط $0\leqslant\alpha<1$، آنگاه $|a_n|\leqslant\dfrac{1-\alpha}{n-\alpha}$ که تساوی تنها برای توابعی بشکل $f(z)=z-\dfrac{1-\alpha}{n-\alpha}z^n$ برقرار است.

لم ۴.۹.۱ [۹۷] تابع $f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n$ در رده ی $\mathcal{TK}^*(\alpha)$ (که $0\leqslant\alpha<1$) قرار می گیرد اگر و فقط اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|\leqslant 1 \tag{۳۵.۱}$$

[۸۹] Kulshrestha

لم ۵.۹.۱. [۹۷] اگر $f \in \mathcal{T}^*(\alpha)$ (که $0 \leqslant \alpha < 1$) سپس

$$r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2 \leqslant |f(z)| \leqslant r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2 \tag{۳۶.۱}$$

$$1 - \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \leqslant |f'(z)| \leqslant 1 + \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \tag{۳۷.۱}$$

و تساوی برای تابع $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} z^2$ برقرار است که $z = \pm r$.

لم ۶.۹.۱. [۹۷] اگر $f \in \mathcal{TK}^*(\alpha)$ (با $0 \leqslant \alpha < 1$) آنگاه

$$r - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \leqslant |f(z)| \leqslant r + \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \tag{۳۸.۱}$$

$$1 - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r \leqslant |f'(z)| \leqslant 1 + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r \tag{۳۹.۱}$$

تساوی بازای تابع $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} z^2$ برقرار می باشد که $z = \pm r$.

لم ۷.۹.۱. [۹۷] اگر $f \in \mathcal{TK}^*(\alpha)$ سپس $f \in \mathcal{T}^*(\frac{2}{3-\alpha})$، نتیجه با تابع اکستریمال $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} z^2$ دقیق است.

لم ۸.۹.۱. [۹۷] اگر $f \in \mathcal{T}^*(\alpha)$ آنگاه شعاع تحدب[۹۰] تابع $f(z)$ عبارتست از

$$r_{con}(\alpha) = \inf_{n \geqslant 2} \left(\frac{n-\alpha}{n^2(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

این مقدار برای تابع اکستریمال $f_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{n-\alpha} z^n$ بازای n-ی دقیق است.

لم ۹.۹.۱. [۹۷] اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{T}$ آنگاه $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leqslant 1$.

۱۰.۱ ستاره‌گون نسبت به نقاط متقارن

گیریم $f(z)$ در $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده و فرض کنید برای هر r کمتر از واحد و بقدرکافی نزدیک به ۱ و هر ζ روی $|z| = r$، سرعت زاویه ای $f(z)$ حول نقطه $f(-\zeta)$ در $z = \zeta$ مثبت است چنانکه z دایره $|z| = r$ را در جهت مثبت می پیماید و بعبارت تحلیلی

$$\mathbf{Re}\, \frac{zf'(z)}{f(z) - f(-\zeta)} > 0 \ , \quad z = \zeta, |\zeta| = r \tag{۴۰.۱}$$

دراینصورت $f(z)$ را نسبت به نقاط متقارن ستاره‌گون[۹۱] نامیم. بداهتا رده ی چنین توابع تک ارزی شامل توابع محدب و توابع فرد ستاره‌گون نسبت به مبداء خواهد شد. بیان معادلی از این تعریف توسط ساکاگوچی[۹۲] ثابت شد و ما آنرا بعنوان تعریف می پذیریم:

[۹۰] Convexity radius

[۹۱] Starlike with respect to symmetric points

[۹۲] Sakaguchi

تعریف ۱.۱۰.۱. [۹۳] تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ نسبت به نقاط متقارن ستاره‌گون است اگر

$$\mathbf{Re}\,\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} > 0\ ,\quad z \in \mathbb{D}$$

این نوع توابع تک ارز بوده و رده ی آنها را با $\mathcal{S}_s^*$ مشخص می کنیم.

لم ۱.۱۰.۱. [۹۳] گیریم $f \in \mathcal{S}_s^*$. سپس $|a_n| \leq 1$ برای $n \geq 2$، تساوی برای تابع $\frac{z}{1+\varepsilon z}$ با $|\varepsilon| = 1$ حاصل می گردد.

تعمیمی از این تعریف را ساکاگوچی چنین بیان می کند:

لم ۲.۱۰.۱. [۹۳] گیریم $f \in \mathcal{A}$ و فرض کنید برای k صحیح مثبتی نابرابری

$$\mathbf{Re}\,\frac{zf'(z)}{\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f(\varepsilon^j z)}{\varepsilon^j}} > 0\ ,\quad z \in \mathbb{D} \tag{۴۱.۱}$$

برای $\varepsilon = e^{2\pi i/k}$ برقرار باشد. آنگاه $f(z)$ در $\mathbb{D}$ تک ارز و نزدیک به محدب است.

تعریف ۲.۱۰.۱. $f(z) \in \mathcal{A}$ نسبت به نقاط متقارن ستاره‌گون از مرتبه α[۹۳] است اگر

$$\mathbf{Re}\,\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} > \alpha\ ,\quad z \in \mathbb{D}$$

که $0 \leqslant \alpha < 1$. این نوع توابع تک ارز بوده و رده ی آنها را با $\mathcal{S}_s^*(\alpha)$ مشخص می کنیم.

۱۱.۱ خانواده $\mathcal{UST}$

همانگونه که گفتیم ستاره‌گونی خاصیتی ارثی برای نگاشت های همدیس است اما همیشه چنین نیست که $f \in \mathcal{S}^*$ هر زیرقرص $|z - z_0| < \rho < 1 - |z_0|$ را به دامنه ای ستاره‌گون نسبت به $f(z_0)$ بنگارد. این واقعیت را براون[۹۴] در ۱۹۸۹ ثابت کرد [۱۸]. وی نشان داد که هر $f \in \mathcal{S}$ هر زیرقرص بقدر کافی کوچکی از $\mathbb{D}$ را به قرص ستاره‌گون خیلی کوچک می نگارد. در حالت کلی تر مجموعه توابعی با این خاصیت را که هر قرص $\{|z - z_0| < \rho\} \subset \mathbb{D}$ را به دامنه ای ستاره‌گون نسبت به $f(z_0)$ می نگارند توسط گودمن[۹۵] از دید تحلیلی و هندسی مورد بررسی قرار گرفت ([۴۱]، [۸۷]):

تعریف ۱.۱۱.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{S}^*$ را در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت[۹۶] گوئیم اگر هر قوس مدور γ درون $\mathbb{D}$ با مرکز $\zeta \in \mathbb{D}$ را به قوس ستاره‌گون $f(\gamma)$ نسبت به $f(\zeta)$ بنگارد.

[۹۳] Starlike with respect to symmetric points of order α
[۹۴] Brown
[۹۵] Goodman
[۹۶] Uniforml starlike

خانواده همه چنین توابعی را با $\mathcal{UST}$ نشان داده و شرط لازم و کافی برای آنکه تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ در این رده باشد آنستکه [۴۱]:

$$\mathbf{Re}\,\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)-f(\zeta)} > 0\,, \quad (z,\zeta) \in \mathbb{D}^2 \tag{۴۲.۱}$$

از طرفی با تعریف ۱ $= \dfrac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)-f(\zeta)}$ به آسانی مشخص می شود که $\mathcal{UST} \subset \mathcal{S}^*$. این رده تحت چرخش، یا دوران $e^{-i\alpha}f(e^{i\alpha}z)$ (بازای $\alpha \in \mathbb{R}$) و انتقال[97]، $\frac{1}{t}f(tz)$، $0 < t \leqslant 1$ حفظ می شود ولی پایای خطی نیست، در واقع تابع خودریختی قرص $f(z) = \dfrac{z}{1-\frac{1}{2}z}$ متعلق به رده $\mathcal{UST}$ نمی شود.

بازای $\zeta = -z$ در (۴۲.۱) بوضوح $\mathcal{UST} \subset \mathcal{S}_s^*$ و در نتیجه برای $f \in \mathcal{UST}$، $|a_n| \leqslant 1$ است اما کران بهتر $|a_n| \leqslant \dfrac{2}{n}$ توسط هوروویتس[98] بدست آمد [۴۱]. تعیین مقدار دقیق از کران ضرایب توابع این رده $\mathcal{UST}$ هنوز مسئله ی باز بشمار می رود. یافتن اکثر خواص رده ی $\mathcal{UST}$ کاری مشکل محسوب می شود ولی بعنوان نمونه اشاره می کنیم به کار گودمن، وی نشان داد

$$f(z) = \frac{z}{1-Az} \in \mathcal{UST} \text{ اگر و فقط اگر } |A| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{۴۳.۱}$$

همچنین وی ثابت نمود که برای $|B| \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{2}}$، تابع $f(z) = z + Bz^n$ بازای $n > 1$ در $\mathcal{UST}$ واقع می شود. مرکز[99] و سلماسی[100] [۶۱] این کران را به $|B| \leqslant \sqrt{\dfrac{n+1}{2n^3}}$ برای $n > 1$ ارتقاء دادند و بیان کردند که این مقدار دقیق نیست. کران ظریف توسط نژمدینتنف[101] در ۱۹۹۷ حاصل شد ([۶۸]، نتیجه ۴، ص ۴۷) وی نشان داد برای $n = 2$، $|B| \leqslant \dfrac{1}{2/31}$ و برای $n = 3$، $|B| \leqslant \dfrac{1}{3/573}$. رونینگ[102] [۸۶]، مرکز و سلماسی [۶۱] نتیجه مهم زیر را بدست آوردند:

لم ۱.۱۱.۱. ([۸۶]، لم ۳.۳، ص ۲۳۶) $f(z) \in \mathcal{UST}$ اگر و فقط اگر برای هر $z \in \mathbb{D}$، و $|x| = 1$،

$$\mathbf{Re}\,\frac{f(z)-f(xz)}{(1-x)zf'(z)} \geqslant 0$$

لم ۲.۱۱.۱. [۸۶] $f(z) \in \mathcal{UST}$ اگروفقط اگر برای هر $z \in \mathbb{D}$، و $|t| = 1$، $\mathbf{Re}\,\dfrac{(1-t)zf'(z)}{f(z)-f(tz)} > 0$.

لم ۳.۱۱.۱. ([۶۱]، قضیه ۴، ص ۴۵۱) $f \in \mathcal{UST}$ اگر بازای همه $z, w \in \mathbb{D}$،

$$\mathbf{Re}\,\frac{f'(w)}{f'(z)} > 0$$

[97] Transformations
[98] Charles Horowitz
[99] Merkes
[100] Salmassi
[101] Nezhmetdinov
[102] Rønning

و اگر $f\in\mathcal{UST}$ آنگاه برای تمام $z,w\in\mathbb{D}$،

$$\mathbf{Re}\left(\frac{f'(w)}{f'(z)}\right)^{\frac{1}{2}}>0$$

نمای $\frac{1}{2}$ بهترین مقدار ممکن است.

بررسی بیشتر روی رده ی $\mathcal{UST}$ از بسط سری تیلور[103] (۴۲.۱) حول z و به طور جداگانه ζ حاصل می شود. گیریم $p(z)=p_0+p_1z+p_2z^2+\cdots$، $q(z)=q_0+q_1z+q_2z^2+\cdots$ و

$$\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)-f(\zeta)}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\zeta)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(z)\zeta^n\,,\quad(z,\zeta)\in\mathbb{D}^2 \tag{۴۴.۱}$$

چنانکه $\mathbf{Re}\,p(z)>0$ و $\mathbf{Re}\,q(z)>0$، سپس

لم ۴.۱۱.۱. ([۴۱]، لم ۱ ص ۳۶۵) اگر $f\in\mathcal{UST}$ آنگاه

$$p_0(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta}\,,\;p_1(\zeta)=\frac{f(\zeta)[1-2a_2\zeta]-\zeta}{\zeta^2}\,,\;q_0(z)=\frac{f(z)}{zf'(z)}\,,\;q_1(z)=\frac{f(z)-z}{z^2f'(z)}$$

و

$$|p_1(\zeta)|\leqslant 2\mathbf{Re}\,p_0(\zeta)\,,\;|q_1(z)|\leqslant 2\mathbf{Re}\,q_0(z)$$

این لم و برآورد کران ضرایب $|a_n|\leqslant\frac{2}{n}$ ما را به نابرابری رشد مناسبی برای اعضای $f\in\mathcal{UST}$ می رساند:

$$\frac{r}{1+2r}\leqslant|f(z)|\leqslant -r+2\ln\frac{1}{1-r}$$

بازای $|z|=r<1$. در نهایت ثابت کوبه[104] برای خانواده $\mathcal{UST}$ را بصورت

$$\frac{1}{3}\leqslant K(\mathcal{UST})\leqslant 1-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

بدست می دهد. برای یافتن شرط کافی که شامل تابعی در $\mathcal{UST}$ شود به روش پیچش[105] نیازمندیم. جهت تعیین بزرگترین مقدار δ چنانکه شرط

$$\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leqslant\delta$$

نتیجه دهد که $f\in\mathcal{UST}$ شود، گودمن نشان داد که $\delta=\frac{\sqrt{2}}{2}=0/7071\ldots$ مقداری پذیرفتنی است لیکن مقدار دقیق δ نباید از $\frac{\sqrt{3}}{2}=0/8660\ldots$ تجاوز نماید. بالاخره

[103] Taylor series exansion
[104] Koebe constant
[105] Convolution

لم ۵.۱۱.۱. (نژمدینتف [۶۸]) اگر $f \in \mathcal{A}$ در شرط $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leqslant \delta_0$ صدق کند، آنگاه $f \in \mathcal{UST}$.

ثابت δ_0 در طرف راست برابر با $\ldots 0/7963 = \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta_0$ است که M بهترین مقدار ممکن بوده که در لم ۳.۱۶.۱ بدست آمد.

لم زیر با استفاده از پیچش روی توابع بیان شده است (ر. ک. ۱۶.۱):

لم ۶.۱۱.۱. ([۶۱]، قضیه ۱ ص ۴۵۰) گیریم $f \in \mathcal{A}$. $f \in \mathcal{UST}$ اگر و تنها اگر برای تمام $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{D}}$،

$$\mathbf{Re}\, \frac{f(z) * \dfrac{z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}}{f(z) * \dfrac{z}{(1-\alpha z)^2}} \geqslant 0\,, \quad z \in \mathbb{D}$$

باید توجه داشت که $\ell(z) = \frac{z}{1-z} = \frac{1}{2}(p_0 - 1)$ در رده ی $\mathcal{UST}$ نیست. رونینگ ثابت کرد که $\mathcal{UST} \not\subseteq \mathcal{S}^*(\frac{1}{2})$ و مسئله تعیین بزرگترین α را مطرح کرد چنانکه $\mathcal{UST} \subset \mathcal{S}^*(\alpha)$. نژمدینتف نشان داد که $\mathcal{UST} \not\subseteq \mathcal{S}^*(\alpha_0)$ بازای $\alpha_0 \approx 0/1483$ درست است. اما یافتن بزرگترین αی چنانکه $\mathcal{UST} \subset \mathcal{S}^*(\alpha)$ مسئله ی باز است.

۱۲.۱ رده ی $\mathcal{UCV}$

بعنوان یادآوری گفتیم که ستاره‌گونی خاصیتی ارثی برای توابع همدیس است اما همیشه چنین نیست که $f \in \mathcal{S}^*$ هر قرص $|z - z_0| < \rho < 1 - |z_0|$ را به دامنه ای ستاره‌گون نسبت به $f(z_0)$ بنگارد. چنین خاصیتی در تحدب نیز برقرار است و گودمن چنین توابعی را از دید تحلیلی و هندسی بررسی نمود که در آن توابع، هر زیرقرص را به مجموعه ای محدب می نگارند ([۴۱]، [۸۷]):

تعریف ۱.۱۲.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ را در $\mathbb{D}$ محدب یکنواخت[۱۰۶] گوئیم اگر هر قوس مدور γ در $\mathbb{D}$ با مرکز $\zeta \in \mathbb{D}$ را به ناحیه محدب $f(\gamma)$ بنگارد.

خانواده همه چنین توابعی با این خاصیت را با $\mathcal{UCV}$ نشان داده و شرطی لازم و کافی برای توابع $f \in \mathcal{S}$ در این رده این است که [۴۰]:

$$\mathbf{Re}\left(1 + (z - \zeta)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqslant 0\,, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{D}^2 \qquad (۴۵.۱)$$

واضح است که $\mathcal{UCV} \subset \mathcal{K}$. بازای $\zeta = -z$ در (۴۵.۱)، داریم $\mathcal{UCV} \subset \mathcal{K}(\frac{1}{2})$ و از آنجا برای $f \in \mathcal{UCV}$، $|a_n| \leqslant \frac{1}{n}$. گودمن با استفاده از تابع $f(z) = \frac{z}{1 - Az}$ نشان داد که خانواده $\mathcal{UCV}$

[۱۰۶] Uniformly convex

پایای خطی نیست ([۴۰]، قضیه ۵ ص۹۰). وی ثابت نمود $f(z)=\frac{z}{1-Az}\in\mathcal{UCV}$ اگر و فقط اگر $|A|\leqslant\frac{1}{3}$.

لم ۱.۱۲.۱. (نژمدیتنف [۶۸]) برای $n\geqslant 2$، $f=z+Bz^n\in\mathcal{UCV}$ اگر و فقط اگر

$$|B|\leqslant\frac{1}{n(2n-1)}$$

لم ۲.۱۲.۱. (نژمدیتنف [۶۸]) اگر $f\in\mathcal{A}$ در شرط $\sum_{n=2}^{\infty}n(2n-1)|a_n|\leqslant 1$ صدق کند سپس $f\in\mathcal{UCV}$. ثابت ۱ در طرف راست بهترین مقدار ممکن است.

مشخصه سازی تک‌ـ‌متغیره بسیار مهمی از رده ی $\mathcal{UCV}$ توسط رونینگ ([۸۸]، قضیه ۱ ص۱۹۰) و مستقلاً ما[۱۰۷] و میندا[۱۰۸] ([۵۷]، قضیه ۲ ص۱۶۷) حاصل شد:

لم ۳.۱۲.۱. $f\in\mathcal{UCV}$ اگر و فقط اگر

$$\mathbf{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|,\quad z\in\mathbb{D} \tag{۴۶.۱}$$

در نتیجه اگر $\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|<\frac{1}{2}$ سپس $f\in\mathcal{UCV}$. از طرفی مشابه قضیه ی الکساندر برای توابع تحلیلی ۱.۴.۱ را نمی توان بین رده های $\mathcal{UCV}$ و $\mathcal{UST}$ بیان کرد [۴۰، ۸۸].

۱۳.۱ رده ی $\mathcal{S_P}$

حال فرض کنید $w=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}$، طبق (۴۶.۱) تعریف کنید

$$\Omega_p=\{w\in\mathbb{C}:\mathbf{Re}\,w>|w-1|\} \tag{۴۷.۱}$$

مجموعه Ω_p درون سهمی $(\mathbf{Im}\,w)^2=2\mathbf{Re}\,w-1$ قرار می گیرد که نسبت به محور حقیقی متقارن بوده و راس آن $(\frac{1}{2},0)$ است. پس $f\in\mathcal{UCV}$ اگر و فقط اگر $1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\in\Omega_p$. خانواده $\mathcal{S_P}$ چنین تعریف می شود:

تعریف ۱.۱۳.۱. رده ی $\mathcal{S_P}$ از توابع ستاره‌گون سهموی[۱۰۹] شامل تمام توابع $f\in\mathcal{A}$ است که در شرط زیر صدق می کنند:

$$\mathbf{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)>\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right|,\quad z\in\mathbb{D} \tag{۴۸.۱}$$

---

[۱۰۷] Ma

[۱۰۸] Minda

[۱۰۹] Parabolic starlike functions

بوضوح $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{S}^*$ و چون ناحیه سهموی Ω_p درون نیم صفحه $\left\{w : \mathbf{Re}\, w > \frac{1}{2}\right\}$ و قطاع $\{w : |\arg w| < \frac{\pi}{4}\}$ قرار می گیرد لذا $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{S}^*(\frac{1}{2}) \cap \mathcal{S}^*_{\frac{1}{2}}$ [۸۸]. همچنین (۴۶.۱) و (۴۸.۱) طبق قضیه الکساندر ۱.۴.۱ نشان می دهند

$$f \in \mathcal{UCV} \Longleftrightarrow zf'(z) \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \tag{۴۹.۱}$$

اما آیا رابطه ای شبیه (۴۹.۱) بین $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ و $\mathcal{UST}$ وجود دارد؟ پاسخ منفی است. گودمن [۴۰] و رونینگ [۸۶] نشان دادند

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \nsubseteq \mathcal{UST} \;\;,\;\; \mathcal{UST} \nsubseteq \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$$

همچنین اگر $\left|z\dfrac{f'(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{1}{2}$ بنابراین $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$.

۱۴.۱ ستاره‌گون ما ـ میندا

ما و مستقلا توسط میندا (۱۹۹۲م.) نمایش های از یکپارچه کردن برخی زیر رده های ستاره‌گون و محدب را با اصل تابعیت یافتند. گیریم ϕ تابعی تحلیلی با جزء حقیقی مثبت بوده و با شرایط $\phi(0) = 1$، $\phi'(0) > 0$ نرمال شده و ϕ، $\mathbb{D}$ را به ناحیه ای ستاره‌گون نسبت به ۱ و متقارن نسبت به محور طولها بنگارد. آنها این زیر رده ها را از توابع ستاره‌گون و محدب معرفی نمودند.

$$\mathcal{S}^*(\phi) = \left\{ f \in A : z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \phi(z),\;\; z \in \mathbb{D} \right\}$$

در ادبیات، توابعی که در این رده اند را به ترتیب ستاره‌گون ما ـ میندا[۱۱۰] و محدب ما ـ میندا[۱۱۱] خوانند.

۱۵.۱ عملگرهای میانگین

فرض بگیرید $co(E)$ پوش محدب[۱۱۲] مجموعه E در $\mathbb{C}$ باشد. میلر و موکانو[۱۱۳] [۶۲] مفهوم عملگر میانگین[۱۱۴] روی مجموعه $\mathbf{K} \subset \mathbf{H}(\mathbb{D})$ را تعریف نمودند. بدین شکل که عملگر میانگین یک عملگر $I : \mathbf{K} \to \mathbf{H}$ است که در $I[f](0) = f(0)$ صدق کرده و

$$I[f](\mathbb{D}) \subset co\big(f(\mathbb{D})\big) \tag{۵۰.۱}$$

[۱۱۰] Ma-Minda starlike
[۱۱۱] Ma-Minda convex
[۱۱۲] Convex hull
[۱۱۳] Mocanu
[۱۱۴] Averaging operator

برای تمام $f\in \mathbf{K}$ درست باشد. یک شرط لازم و کافی برای عملگر میانگین چنین است:

لم ۱.۱۵.۱. ([۶۲]، لم ۲) گیریم $\mathbf{K}\subset \mathbf{H}$ و فرض کنید $I:\mathbf{K}\to \mathbf{H}$ عملگر میانگین بازای تمام $f\in \mathbf{K}$ در $I[f](0)=f(0)$ صدق نماید. شرط لازم و کافی برای I روی $\mathbf{K}$ عملگر میانگین باشد آنستکه

$$(f\in \mathbf{K}, h \text{ محدب باشد و } f\prec h) \Longleftrightarrow I[f]\prec h. \tag{۵۱.۱}$$

همچنین نویسنگان فوق مثال زیر را ارائه داند:

$$I_\gamma[f](z)=\frac{\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f(t)t^{\gamma-1}dt \tag{۵۲.۱}$$

که یک عملگر میانگین روی $\mathbf{H}$ است برای $\mathrm{Re}\,\gamma>0$. آنها تعمیمی از (۵۲.۱) را به شکل

$$I_{\beta,\gamma}[f](z)=\left[\frac{\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f^\beta(t)t^{\gamma-1}dt\right]^{\frac{1}{\beta}} \tag{۵۳.۱}$$

برای $\mathrm{Re}\,\gamma>0$ ارائه دادند [۶۳] و نشان دادند که این عملگرها، عملگر میانگین روی مجموعه های خاصی از $\mathbf{H}$ می باشند.

۱۶.۱ پیچش

مطالعه ی پیچش روی توابع تحلیلی در اواسط قرن بیستم انجام گرفت و بعنوان ابزاری جانبی جهت بررسی رده ی توابع تک ارز بکار رفت. در ۱۹۷۳ روشه ویه و شیل_اسمال ثابت کردند که پیچش یک تابع محدب با یک تابع محدب (به ترتیب نزدیک به محدب)، خود یک تابع محدب (به ترتیب نزدیک به محدب) است و پیچش تابع ستاره‌گون با تابع نزدیک به محدب، ستاره‌گون خواهد شد بعلاوه این نتیجه مهم را ثابت نمودند که با فرض $f\in\mathcal{K}$، $F\in\mathcal{K}$ و $G\in\mathcal{C}$، سپس $\frac{f*zG'}{f*zF'}$ همه مقادیرش را در دامنه ی محدب D می گیرد، اگر $\frac{G'}{F'}$ همه ی مقادیرش را در D اخذ کند. هرچند آنچه در زمینه پیچش روی توابع همساز انجام شده، قابل توجه و استفاده است لیکن خلاء موجود در کلیت دادن به مسائل قبلی کاملا دیده می شود. تعمیم رده های قبلی از توابع همساز با استفاده از پیچش، اعمال پیچش روی توابع رده های مختلف نظیر ستاره‌گون و محدب و نزدیک_به_محدب و غیره از این قبیل مسائل بشمار می رود که نبود کلیت در آنها کاملا دیده می شود. کارهای اخیر برخی مولفان در چند سال اخیر، تنها نشان دهنده تکامل بخش کوچکی از این موضوعات است و کاوش بیشتر روی این مباحث، نیازمند زمان و مطالعات بیشتر خواهد بود. استفاده از تعاریف فوق و تعمیم آنها به توابعی که حاصل کنش آنها با توابع دیگر رده ها در اثر پیچش می باشد هدف نهائی این رساله خواهد بود. هرچند تعاریف اولیه و حصول برخی ویژگی ها در این زمینه در حال انجام است لیکن تا تحصیل قطعی نتایج و تایید یافته ها، اندکی زمان لازم خواهد بود.

پیچش یا ضرب هادامار[۱۱۵] دو تابع $f(z)$ و $F(z)$ با سری های توانی $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ و $F(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}A_nz^n$ را با $f*F$ نشان داده و بشکل زیر تعریف می کنیم[۱۱۶]

$$(f*F)(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nA_nz^n, \tag{۵۴.۱}$$

نگاشت $\ell(z)=\dfrac{z}{1-z}$ به عنوان همانی پیچش عمل کرده و نگاشت کوبه $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ بعنوان عمل مشتق روی توابع عمل می نماید. برخی از خواص پیچش روی توابع تحلیلی f و F چنین است:

$$\begin{aligned}
&f*F=F*f\\
&\alpha(f*F)=\alpha f*F\\
&f*\ell(z)=f\\
&zf*zF=z(f*F)\\
&f*\frac{1}{\alpha}(\alpha z)=\frac{1}{\alpha}f(\alpha z)\\
&\overline{f*F}=\overline{f}*\overline{F}\\
&f_1*(f_2*f_3)=(f_1*f_2)*f_3\\
&\alpha(f*F)=\alpha f*F\\
&zf'(\alpha z)=f*\frac{z}{(1-\alpha z)^2}\\
&\frac{1}{\alpha}f(\alpha z)=f*\frac{z}{1-\alpha z}\\
&zf'(z)=f*k(z)\\
&z(f*F)'=zf'*F=f*zF'\\
&\frac{f(\alpha z)-f(\beta z)}{\alpha-\beta}=f*\frac{z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}
\end{aligned}$$

که $\alpha\in\hat{\mathbb{C}}$، همچنین برای تابع حقیقی g داریم:

$$\mathbf{Re}\,(f*g)=\mathbf{Re}\,f*g \quad , \quad \mathbf{Im}(f*g)=\mathbf{Im}f*g$$

در حالتی که توابع $f(z)$ و $F(z)$ تحلیلی اند این عمل مهم تلقی شده و به شکل ابزاری مفید در نظریه توابع تک ارز بکار گرفته شده است. رده های ستاره‌گون، محدب و تابع

[۱۱۵] Hadamard product

[۱۱۶] عبارت پیچش از آنجا آمده که برای $|z|<\rho<1$

$$(f*F)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}f\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)F(z)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

نزدیک به محدب تحت عمل پیچش با توابع محدب بسته اند. این موضوع توسط پولیا[۱۱۷] و شوئنبرگ[۱۱۸] حدس زده شد و بوسیله روشه ویه و شیل_سمال[۱۱۹] در ۱۹۷۳ ثابت گردید [۹۲]:

(الف) اگر $f\in\mathcal{K}$ و $F\in\mathcal{K}$، آنگاه $f*F$ نیز در $\mathcal{K}$ است.

(ب) اگر $f\in\mathcal{K}$ و $F\in\mathcal{C}$، آنگاه $f*F$ هم در $\mathcal{C}$ است.

(ج) اگر $f\in\mathcal{K}$، $F\in\mathcal{K}$ و $G\in\mathcal{C}$ سپس اگر $\frac{G'}{F'}$ همه مقادیرش را از D بگیرد آنگاه $\frac{f*zG'}{f*zF'}$ همه مقادیرش را در دامنه محدب D خواهد گرفت.

بعلاوه

(د) اگر $f\in\mathcal{C}$ و $F\in\mathcal{S}^*$ آنگاه $f*F$ هم در $\mathcal{S}^*$ قرار می گیرد.

اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|\leq 1$ آنگاه $f\in\mathcal{C}$ و اگر $f\in\mathcal{C}$ سپس $|a_n|\leq 1$

اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\leq 1$ آنگاه $f\in\mathcal{S}^*$ و اگر $f\in\mathcal{S}^*$ سپس $|a_n|\leq n$

اگر $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|\leq 1$ آنگاه $f\in\mathcal{S}^*(\alpha)$ و اگر $f\in\mathcal{S}^*$ سپس $|a_n|\leq n$

اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|\leq 1$ آنگاه $f\in\mathcal{K}$

لم ۱.۱۶.۱. (روشه ویه و شیل_سمال [۹۲]) فرض کنید $f(z)$ و $F(z)$ در $\mathbb{D}$ تحلیلی و $f(0)=F(0)=0$ باشد. اگر f محدب بوده F ستاره‌گون باشد، آنگاه برای هر تابع $p(z)$ که در $\mathbb{D}$ تحلیلی است $\mathbf{Re}\ p(z)>0$ است داریم:

$$\mathbf{Re}\,\frac{(f*pF)(z)}{(f*F)(z)}>0\quad,\quad z\in\mathbb{D}$$

تعیین اینکه آیا رده ی $\mathcal{UST}$ تحت پیچش با توابع محدب بسته است یا خیر مسئله ی باز می باشد.

تعریف ۱.۱۶.۱. برای زیرمجموعه مفروض $\mathcal{V}\subset\mathcal{A}$، مجموعه دوگان[۱۲۰] $\mathcal{V}^*$ عبارتست از

$$\mathcal{V}^*=\left\{g\in\mathcal{A}:\frac{f*g(z)}{z}\neq 0,\ \forall f\in\mathcal{V},\ \forall z\in\mathbb{D}\right\}$$

نژمدیتنف (۱۹۹۷) ثابت کرد که برای رده ی های $\mathcal{UST}$ و $\mathcal{UCV}$، مجموعه های دوگان معینی از توابع در $\mathcal{A}$ وجود دارند و نشان داد ([۶۸]، قضیه ۲ ص۴۳) که مجموعه دوگان رده ی $\mathcal{UST}$ زیرمجموعه $\mathcal{A}$ و شامل توابع $h:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ است که

$$h(z)=\frac{z\left(1-\frac{w+i\alpha}{1+i\alpha}z\right)}{(1-wz)(1-z)^2}$$

[۱۱۷] Pólya

[۱۱۸] Schoenberg

[۱۱۹] Shiel-Small

[۱۲۰] Dual set

که $\alpha \in \mathbb{R}$، $w \in \mathbb{C}$ و $|w| = ۱$. وی برآورد یکنواخت $|a_n(h)| \leq dn$ را برای ضریب nـام بسط سری تیلور h در مجموعه دوگان $\mathcal{UST}$ با ثابت دقیق $d = \sqrt{M} \approx ۱/۲۵۵۷$ بدست آورد که $M \approx ۱/۵۷۷۰$ مقدار ماکزیمال عبارت مثلثاتی (۵۵.۱) است. با استفاده از این او ثابت کرد

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{۱}{\sqrt{M}} \Longrightarrow f \in \mathcal{UST}$$

کران $\frac{۱}{\sqrt{M}}$ دقیق است.

لم ۲.۱۶.۱. [۶۸] گیریم

$$G_۰ = \left\{g \in \mathcal{A} : g(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}\left[۱ - \frac{i\alpha}{۱+i\alpha}z\right], \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

آنگاه $\mathcal{S}^* = G_۰^*$ و $|a_n| \leq n(۲n-۱)$ برای هر $g \in G_۲$.

نژمدیتنف مجموعه دوگان رده های $\mathcal{UST}$ و $\mathcal{UCV}$ را بدست آورد [۶۸]:

لم ۳.۱۶.۱. فرض کنید

$$G_۱ = \left\{g \in \mathcal{A} : g(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}\left[۱ - \frac{(t+i\alpha)}{۱+i\alpha}z\right]\left[\frac{۱}{۱-tz}\right], \alpha \in \mathbb{R}, |t| = ۱\right\}$$

آنگاه $\mathcal{UST} = G_۱^*$ و $c_n = \sup_{g \in G_۱} |a_n| \leq dn$ برای همه $n \geq ۲$ با ثابت دقیق $d = \sqrt{M} = ۱/۲۵۵۷\ldots$ که $M = S(\theta_۰) = ۱/۵۷۷۰\ldots$ ماکزیمم عبارت

$$S(\theta) = \frac{۱}{۲}\left[۱ + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^۲ + \sqrt{\left(۱ + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^۲\right)^۲ - \left(\frac{\sin ۲\theta}{\theta}\right)^۲}\,\right] \tag{۵۵.۱}$$

روی $۰ \leq \theta \leq \pi$ است. از اینجا نقطه اکستریمال $\theta_۰ = ۰/۹۹۵۸\ldots$ جواب یکتای معادله

$$\theta^۳(\cos\theta + \cos ۳\theta) - \theta^۲ \sin ۳\theta + \sin^۳\theta = ۰ \tag{۵۶.۱}$$

روی پاره خط $۰/۸ \leq \theta \leq ۱/۳$ است.

نژمدیتنف (۱۹۹۷) مجموعه دوگان رده ی $\mathcal{UCV}$ را یافت و نشان داد که $|a_n| \leq n(۲n-۱)$ برآورد بکنواختی برای nـامین بسط تیلور توابع دوگان محسوب می شود:

لم ۴.۱۶.۱. [۶۸] فرض کنید

$$G_۲ = \left\{g \in \mathcal{A} : g(z) = \frac{z}{(۱-z)^۳}\left[۱ - z - \frac{۴z}{(\alpha+i)^۲}\right], \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

آنگاه $\mathcal{UCV} = G_۲^*$ و $|a_n| \leq n(۲n-۱)$ برای تمام $g \in G_۲$.

۱۷.۱ توابع پیش ستاره‌گون

تعریف ۱.۱۷.۱. تابع $f(z)\in \mathbf{H}(\mathbb{D})$ را پیش ستاره‌گون[۱۲۱] از مرتبه α (با $\alpha\leqslant ۱$) نامیم اگر

$$\frac{z}{(۱-z)^{۲-۲\alpha}}*f(z)\in \mathcal{S}^*(\alpha)$$

و برای $\alpha=۱$، $\mathbf{Re}\,\frac{f(z)}{z}>\frac{۱}{۲}$.

مجموعه چنین توابعی با R_α نموده می شود. داریم $R_۰=\mathcal{K}$ و $R_{\frac{۱}{۲}}=\mathcal{S}^*(\frac{۱}{۲})$.
گیریم $\Omega^*=\mathcal{C}-[۱,\infty)$ و $f(z)\in \mathbf{H}(\Omega^*)$ تعریف می کنیم

$$(D^\beta f)(z)=\frac{z}{(۱-z)^\beta}*f(z)$$

برای $\beta\geqslant ۰$. $(D^۱f)(z)=f(z)$، $(D^۲f)(z)=zf'(z)$ و بازای $\beta=n\in\mathbb{N}$ داریم $D^{n+۱}f=\frac{۱}{n!}z(z^{n-۱}f)^{(n)}$.

تعریف ۲.۱۷.۱. فرض کنید $\alpha\leqslant ۱$ و $\mathfrak{p}\in\mathbb{P}$ در $\mathbb{D}$ با شرط $\mathfrak{p}'(۰)>۰$ باشد که $\mathfrak{p}(\mathbb{D})$ نسبت به ۱ ستاره‌گون و نسبت به محور طولها نیز متقارن است. آنگاه رده ی $R^u_\alpha(\mathfrak{p})$ شامل تمام توابع تحلیلی $f(z)\in \mathbf{H}(\Omega^*)$ در شرط زیر صدق می کند:

$$\frac{D^{۳-۲\alpha}f}{D^{۲-۲\alpha}f}\prec \mathfrak{p}$$

با فرض $g(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}n^mz^n$ بازای $m=۰,۱,۲,۳,\cdots$، سپس $f*g$ نمایشگر مشتق سالاگان[۱۲۲] f است که $f(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n$.

لم ۱.۱۷.۱. (راوی چاندران[۱۲۳] و دیگران. [۸۴]) اگر تابع $\mathfrak{p}(z)=۱+c_۱z+c_۲z^۲+\cdots$ در $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده و $\mathbf{Re}\,\mathfrak{p}(z)>۰$ باشد آنگاه $|c_۲-\epsilon c_۱^۲|\leqslant ۲\max\{۱,|۲\epsilon-۱|\}$. تساوی برای $p(z)=\frac{۱+z}{۱-z}$ دقیق است.

ملاحظه ۱.۱۷.۱. گیریم

$$f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nz^n=\int_۰^۱\frac{d\mu(t)}{۱-tz}$$

که $a_n=\int_۰^۱ t^nd\mu(t)$ و $\mu(t)$ اندازه احتمالاتی روی $[۰,۱]$ است.

---
[۱۲۱] Prestarlike Function
[۱۲۲] Sălăgean derivative
[۱۲۳] Ravichandran

تعریف ۳.۱۷.۱. فرض کنید f در یک ناحیه همبند ساده شامل مبداء تحلیلی باشد. مشتق کسری f از مرتبه λ را بصورت

$$D_z^{\lambda} f(z) := \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{\lambda}} \qquad (0<\lambda<1)$$

تعریف می کنیم که چندگانگی $(z-\zeta)^{\lambda}$ با این نیاز که $\log(z-\zeta)$ برای $z-\zeta>0$ حقیقی است، حذف می شود.

با این تعریف توسیع شناخته شده ای از مشتق کسری و انتگرال کسری وجود دارد. اووا و اسریواستاوا[124] عملگر $\Omega^{\lambda} := \mathbf{H}(\mathbb{D}) \to \mathbf{H}(\mathbb{D})$ را برای λ و اعداد حقیقی مثبت $\lambda \neq 2,3,4,\dots$ بصورت

$$(\Omega^{\lambda} f)(z) = \Gamma(2-\lambda) z^{\lambda} D_z^{\lambda} f(z)$$

تعریف کردند. در اینجا توابع پیش ستاره‌گون از مرتبه مختلط تعریف می شوند [۹۴].

تعریف ۴.۱۷.۱. گیریم $\alpha \leqslant 1$ و $b \neq 0$ عددی مختلط باشد. فرض کنید $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ در $\mathbb{D}$ با شرط $\mathfrak{p}'(0) > 0$ بوده که $\mathfrak{p}(\mathbb{D})$ نسبت به ۱ ستاره‌گون و نسبت به محور طولها متقارن باشد. سپس رده ی $R^{u}_{\alpha,b}(\mathfrak{p})$ شامل تمام توابع تحلیلی $f(z) \in \mathbf{H}(\Omega^{*})$ است که در شرط زیر صدق می کنند

$$1 + \frac{1}{b}\left(\frac{D^{3-2\alpha} f}{D^{2-2\alpha} f} - 1\right) \prec \mathfrak{p}$$

[124] Srivastava

فصل ۲

توابع همساز

تعاریف توابع تحلیلی و خواص آنها به توابع همساز تعمیم داده شد. توابع همساز در نیمه اول قرن بیستم به طور مختصر معرفی و بررسی شدند و توسط هندسه دیفرانسیل دانانی مانند چوکه [۱] ، کنزه [۲] ، لوی [۳] و رادو [۴] مطالعه گردیدند. پس از آن توابع مختلط همساز توسط نظریه پردازان هندسی توابع، کلونی [۵] و شیل اسمال [۶] گسترش یافت. آنها اصول نظری خانواده ی توابع همساز که بر $\mathbb{D}$ تک ارز می شوند را توسعه دادند. این شاخه از توابع همساز مختلط که تک ارزی آنها روی قرص واحد بررسی می شود تنها در سه دهه اخیر مطالعه و فرمولبندی شده و از آنجا که تصور می شد که این خانواده از توابع، تعمیمی از توابع تحلیلی خواهند بود بیشتر مورد توجه قرار گرفت و بدین ترتیب غالب موضوعاتی را که درباره توابع تحلیلی مطرح بوده و هست را روی این خانواده بررسی می نمایند.

در این فصل $u(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را تابع همساز حقیقی [۷] نامیم اگر در معادله ی $u_{xx}+u_{yy}=0$ که به معادله لاپلاس [۸] شهرت دارد صدق نماید. معادله لاپلاس در خیلی از علوم کاربردی ظاهر می

[۱] Gustave Choquet (1915-2006)
[۲] Adolf Kneser (1862-1930)
[۳] Hans Lewy (1904-1988)
[۴] Richard Radó (1906-1989)
[۵] Clunie
[۶] Sheil-Small
[۷] Harmonic real function
[۸] Laplace equation

شود مثلاً در بسیاری از مسائل فیزیکی نظیر هیدرودینامیک[۹] و پتانسیل سرعت[۱۰]. معادلات جریان سیالات[۱۱] در معادله لاپلاس صدق می‌کنند و نیز رابطه‌ی پتانسیل الکترواستاتیک[۱۲] دارای این خاصیت است. همچنین معادله لاپلاس ارتباطات مهمی با فرایندهای احتمالاتی[۱۳] و تصادفی نیز این معادله بخوبی ظاهر شده و در مباحث مهندسی نیز استفاده از آن امری ضروری بشمار می رود.

۱.۲ نگاشت های همساز حقیقی تک ارز

هر تابع همساز از رده ی C^∞ بوده و بی نهایت بار مشتقپذیر است. بعلاوه هر تابع همساز بر یک دامنه ی همبندساده، قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است که بر آن ناحیه تعریف می گردد. همچنین

لم ۱.۱.۲. [۳۹] تابع همساز دارای خاصیت مقدار میانگین بوده و در نتیجه در اصل مقدار ماکزیمم[۱۴] صدق می کند. توابع همساز حقیقی در اصل مقدار مینیمم[۱۵] هم صادق بوده و اگر f تابعی همساز بر دامنه ی $|z| < \rho$، (برای $\rho > 0$)، تعریف شده باشد سپس برای هر $0 < r < \rho$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} f(re^{i\theta})d\theta, \quad ; \quad |z| < r. \tag{۱.۲}$$

لم ۲.۱.۲. (فرمول انتگرال پواسن[۱۶] [۳۹]). گیریم f تابعی همساز روی دامنه $|z| < \rho$ باشد که $\rho > 0$. آنگاه برای هر $0 < r < \rho$،

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} f(re^{i\theta})d\theta, \quad ; \quad |z| < r. \tag{۲.۲}$$

این توابع را می توان تعمیمی از نگاشتهای تحلیلی بحساب آورد.

---

[۹] Hydrodynamics
[۱۰] Velocity potential
[۱۱] Fluid flow
[۱۲] Electrostatics potential
[۱۳] Stochastic processes
[۱۴] Maximum Modulus Principle
[۱۵] Minimum Modulus Principle
[۱۶] Poisson integral formula

۲.۲ نگاشتهای تک ارز همساز مختلط

در ادامه از نگاشتهای همساز مسطح[۱۷] صحبت خواهیم کرد که تعمیم نگاشت های همساز حقیقی[۱۸] تک ارز هستند. فرض کنید H خانواده ی توابع مختلط پیوسته باشد که بر قرص واحد $\mathbb{D}$ همسازند. گیریم $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. تابع $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابع همساز مختلط[۱۹] است اگر f پیوسته باشد و u و v در D همساز حقیقی باشند. در حالت کلی u و v لزوما مزدوج همساز[۲۰] نیستند زیرا در غیر این حالت، تابع f تحلیلی بوده و مورد بحث ما نیست.
اگر D همبند ساده باشد، در این صورت نمایش استانداردی برای f خواهیم داشت [۲۵]:

لم ۱.۲.۲. [۳۰] گیریم D دامنه ای همبند ساده و $f = u + iv$ در D همساز باشد. سپس f دارای نمایش کانونی[۲۱] $f = h + \overline{g}$ است که h و g در D تحلیلی می باشند. h را بخش تحلیلی و g را بخش هم تحلیلی[۲۲] تابع f خوانیم.

حال به فرض $f(0) = 0$ در دامنه ی $\mathbb{D}$، می توان توابع تحلیلی h و g را با بسطهای سری تیلور $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ نشان دهیم بدینترتیب f دارای نمایش سری به شکل

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \tag{۳.۲}$$

خواهد بود. ژاکوبین[۲۳] تابع $f = u + iv$ عبارتست از

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

که از محاسبات زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}
f_z &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y) = \frac{1}{2}\Big(u_x + v_y + i(v_x - u_y)\Big) \\
f_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y) = \frac{1}{2}\Big(u_x - v_y + i(v_x + u_y)\Big) \\
|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 &= \frac{1}{4}\Big((u_x + v_y)^2 + (v_x - u_y)^2 - (u_x - v_y)^2 - (v_x + u_y)^2\Big) = u_x v_y - u_y v_x
\end{aligned}$$

اگر f تحلیلی باشد، ژاکوبین فرم زیر را بخود می گیرد

$$J_f(z) = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

[۱۷] Planar harmonic mappings
[۱۸] Real-Value Harmonic Maps
[۱۹] Complex-valued harmonic function
[۲۰] Harmonic conjugates
[۲۱] Canonical representation
[۲۲] Co-analytic
[۲۳] Jacobian

گوئیم نگاشت همساز $f=h+\overline{g}$ در $z=a$ جهت نگهدار[۲۴] است اگر $J_f(a)>0$ یعنی $|h'(a)|^2-|g'(a)|^2>0$ یا $|h'(a)|>|g'(a)|$. با فرض $\omega(z)=\dfrac{g'(z)}{h'(z)}$ سپس $f=h+\overline{g}$ در $z=a$ جهت نگهدار است اگر $|\omega(a)|<1$ و آنرا جهت برگردان[۲۵] در این نقطه گوئیم اگر $|\omega(a)|>1$. تابع $\omega(z)$ تابعی تحلیلی روی $\mathbb{D}$ بوده و انبساط مختلط دوم[۲۶] f نامیده می شود. توجه کنید که $\omega(z)=0$ اگر و فقط اگر f تحلیلی باشد. بالاخره اینکه نمایش $f=h+\overline{g}$ معادل با نمایش سودمند $f=\mathbf{Re}\,(h+g)+i\mathbf{Im}(h-g)$ است.

لم ۲.۲.۲. [۳۰] همه ی نقاط بحرانی تابع همساز غیرثابت مجزا هستند.

قضیه ۱.۲.۲. (قضیه لوی[۲۷] [۳۰]) اگر f تابع همساز مختلطی باشد که در یک دامنه ی $D\subset\mathbb{C}$ موضعا تک ارز است، آنگاه ژاکوبین آن برای $z\in D$ ناصفر است $J_f(z)\neq 0$.

بنابراین از دید قضیه لوی، تابع همساز مختلطی که در یک دامنه موضعا تک ارز و جهت نگهدار باشد، در آن دامنه ژاکوبین مثبت دارد. اگر $J_f<0$، سپس $\overline{f}$ جهت نگهدار است.

فرمول انتگرال پواسن برای نگاشتهای همساز مختلط نیز صحیح است [۳۰].

۳.۲ رده ی $\mathcal{S}_H$

بعنوان تعمیمی از شکل همساز $\mathcal{A}$، گیریم $\mathcal{H}$ رده ی توابع مختلطی به شکل $f=h+\overline{g}$ باشدکه روی $\mathbb{D}$ همسازند و h و g توابع تحلیلی نرمالشده روی $\mathbb{D}$ چنان هستند که

$$f(z)=h+\overline{g}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b_n}\overline{z}^n \tag{۴.۲}$$

تعمیمی از رده $\mathcal{S}$ روی توابع همساز وجود دارد که بسیاری از خواص رده ی قبل را حفظ می کند. در نظر بگیرید که $\mathcal{S}_H$ خانواده ی تمام توابع همساز تک ارز مختلطی به شکل (۳.۲) است که روی $\mathbb{D}$ جهت نگهدار بوده و با شروط $a_0=0$ و $a_1=1$ نرمال شده اند. پس هر عضو $f\in\mathcal{S}_H$ دارای بسط سری (۴.۲) خواهد بود. این رده ابتدا توسط کلونی و شیل_سمال در ۱۹۸۴ مطالعه شد [۲۵] و سپس خواص دیگری از آن بدست آمد که در مطالعه ی توابع همساز مسطح سودمند بنظر می رسیدند.

۴.۲ رده ی $\mathcal{S}_H^\circ$

اکنون توابع رده ی $f\in\mathcal{S}_H$ را چنان محدود می کنیم که $b_1=0=f_{\overline{z}}(0)=\overline{g'(0)}$ باشد و این رده را با $\mathcal{S}_H^\circ$ نمایش می دهیم. روشن است که $\mathcal{S}\subset\mathcal{S}_H^\circ\subset\mathcal{S}_H$ و ثابت می شود که خانواده ی

[۲۴] Sense-preserving

[۲۵] Sense-reserving

[۲۶] Second complex dilatation

[۲۷] Lewy

نرمال فشرده است و این در حالی است که S_H چنین نیست. این خانواده تحت مزدوج سازی، چرخش، انبساط، خودریختی قرص و انتقال برد حفظ می شود. شبیه به حدس بیبرباخ در رده ی S، در اینجا نیز حدس بیبرباخ همساز[۲۸] مطرح می شود: فرض کنید $f(z) \in S_H^\circ$ تابع همساز به شکل (۴.۲) باشد آنگاه

$$|a_n| \leqslant \frac{۱}{۶}(n+۱)(۲n+۱) \tag{۵.۲}$$

$$|b_n| \leqslant \frac{۱}{۶}(n-۱)(۲n-۱) \tag{۶.۲}$$

$$\big||a_n|-|b_n|\big| \leqslant ۱ \tag{۷.۲}$$

با وجود اینکه این حدس یک مسئله ی باز بشمار می رود، در برخی زیررده های آن به اثبات رسیده است. همچنین برای تمام توابع $f(z) \in S_H^\circ$ داریم $|a_۲| < ۴۹$ که بهترین کران شناخته شده است. ایضا

لم ۱.۴.۲. [۳۰] برای تمام توابع $f(z) \in S_H^\circ$، نامساوی دقیق $|b_۲| \leqslant \frac{۱}{۲}$ برقرار است.

۵.۲ روش برش

ایجاد روش ساختار برشی[۲۹] در ابتدا توسط کلونی و شیل_سمال در ۱۹۸۴ معرفی گردید [۲۵] و جهت مطالعه ی توابع همساز مسطح بکار گرفته شد. این تکنیک روش ساختن یک نگاشت همساز تک ارز را در صفحه بیان می کند و یکی از خصوصیات مهم آن استفاده از توابع تحلیلی مرتبط با آن می باشد، و بنابراین آگاهی از این روش در کار با توابع همساز بسیار ضروری است.

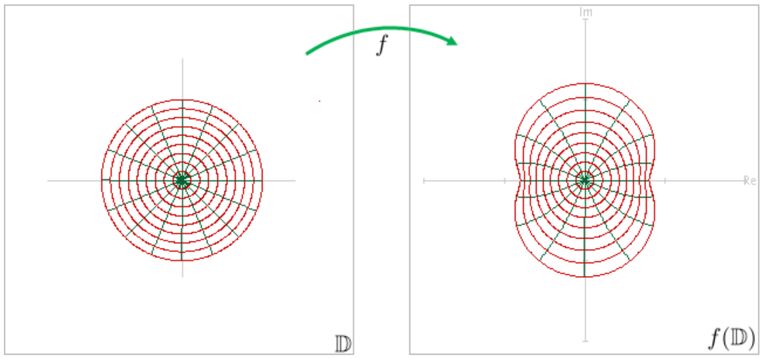
لم ۱.۵.۲. [۳۰] فرض کنید $f = h + \bar{g}$ در $\mathbb{D}$ همساز و موضعا تک ارز باشد. سپس f تک ارز و بردش CHD است اگر و تنها اگر $h - g$ تک ارز و بردش CHD باشد.

برای استفاده از تکنیک برش، با بکارگیری لم فوق و $F = h - g$ تک ارز مفروضی با برد CHD همراه با یک انبساط $\omega(z) = \dfrac{g'(z)}{h'(z)}$ خواسته شده، می توان تابع همساز تک ارز $f = h+\bar{g}$ را با برد CHD یافت. طی این فرآیند فرض $|\omega(z)| < ۱$ برای جهت نگهداربودن f ضروری است (قضیه ۱.۲.۲).

مثال ۱.۵.۲. تابع $F = z - \frac{۱}{۶}z^۳$ با برد CHD مفروض است (شکل۱.۲). می خواهیم نگاشت همساز تک ارز $f = h + \bar{g}$ را با انبساط $\omega(z) = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}}z$ بیابیم. تابع f جهت نگهدار خواهد بود زیرا $|\omega(z)| = |\frac{۱}{\sqrt{۲}}z| < ۱$. می نویسیم $h - g = z - \frac{۱}{۶}z^۳$ و $\dfrac{g'(z)}{h'(z)} = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}}z$ بنابراین

[۲۸] Harmonic Bieberbach conjecture

[۲۹] Shearing construction technique



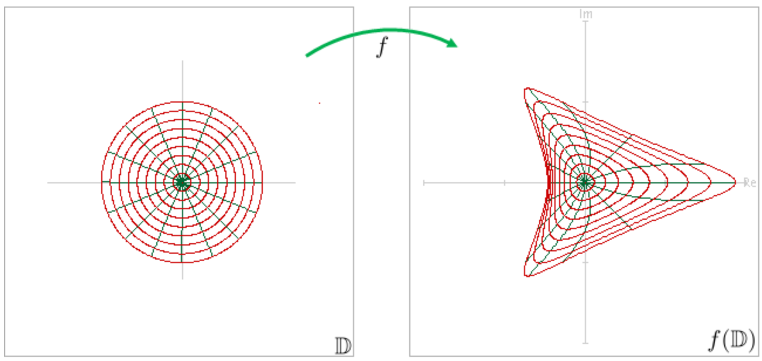
شکل ۱.۲: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همدیس $F = z - \frac{1}{6}z^3$.

$$\begin{cases} h' - g' = 1 - \frac{1}{2}z^2 \\ g' = \frac{1}{\sqrt{2}} z h' \end{cases} \quad \begin{cases} h'(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z \\ g'(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} z + \frac{1}{2} z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} h(z) = z + \frac{1}{2\sqrt{2}} z^2 \\ g(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} z^2 + \frac{1}{6} z^3 \end{cases}$$

توجه کنید که $h(0) = g(0) = 0$ و بدینصورت نگاشت همساز تک ارز

$$f = h + \overline{g} = z + \frac{1}{2\sqrt{2}} z^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \overline{z}^2 + \frac{1}{6} \overline{z}^3$$

با برد CHD حاصل می گردد (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت $f = z + \frac{1}{2\sqrt{2}} z^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \overline{z}^2 + \frac{1}{6} \overline{z}^3$.

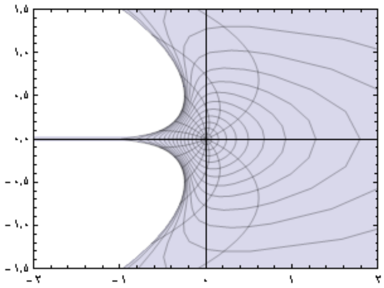
مثال ۲.۵.۲. فرض کنید $F = \frac{z}{1-z}$ که تک ارز محدب است (شکل ۲.۱). می خواهیم نگاشت همساز تک ارز $f = h + \overline{g}$ را با انبساط $\omega(z) = z^2$ بسازیم. شرط $|\omega(z)| = |z^2| < 1$ موضعا تک ارزی f را تضمین می کند. گیریم $h - g = \frac{z}{1-z}$ و $\frac{g'(z)}{h'(z)} = z^2$ و بنابراین

$$\begin{cases} h' - g' = \frac{1}{(1-z)^2} \\ g' = z^2 h' \end{cases} \quad \begin{cases} h'(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z)^2} \\ g'(z) = \frac{z^2}{(1-z^2)(1-z)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} h(z) = \frac{z-2}{4(z-1)^2} + \frac{1}{8} \log \frac{z+1}{z-1} + \frac{i\pi}{8} - \frac{1}{2} \\ g(z) = \frac{3z-2}{4(z-1)^2} + \frac{1}{8} \log \frac{z+1}{z-1} + \frac{i\pi}{8} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

با ثابت انتگرالگیری $h(0) = g(0) = 0$ و بعد

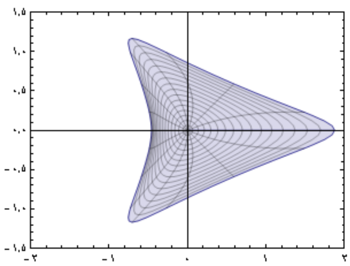
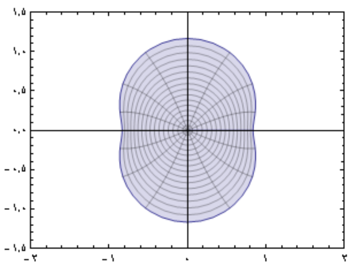
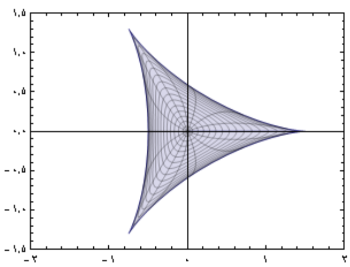
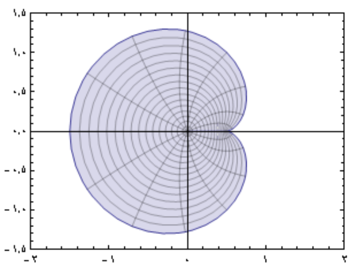
$$f = h + \overline{g} = -\frac{1}{2}\frac{z}{(1-z)^{2}} + 2\mathbf{Re}\left(\frac{3z-2}{4(z-1)^{2}} + \frac{1}{8}\log\frac{z+1}{z-1}\right)$$

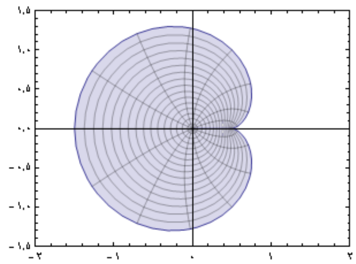
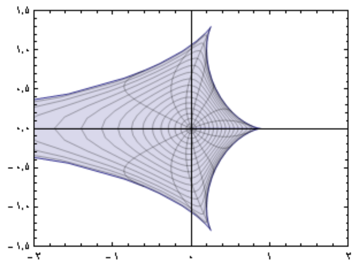
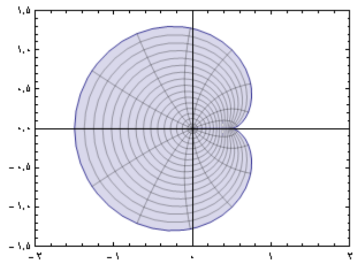
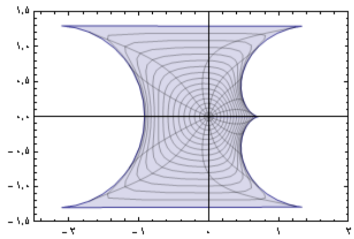
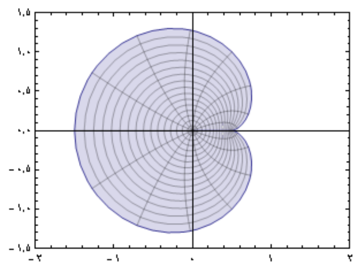
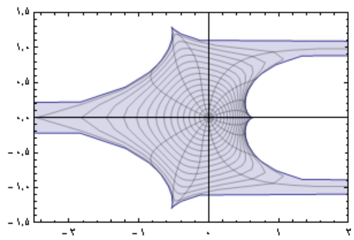
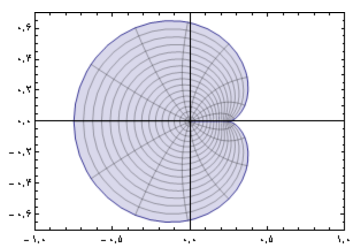
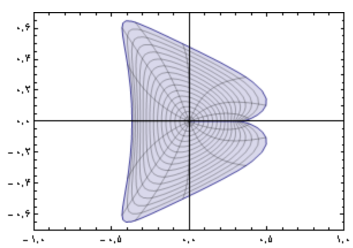
نگاشت CHD مطلوب خواهد بود (شکل ۳.۲).

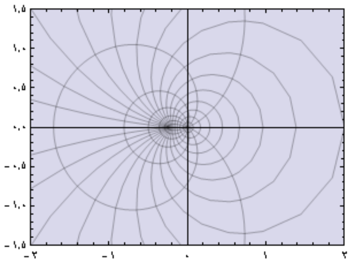
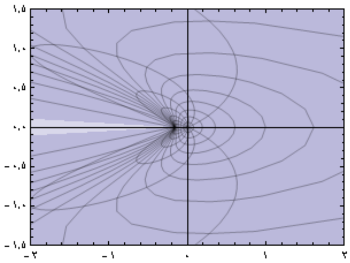


شکل ۳.۲: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همساز f در مثال ۲.۵.۲.

در ذیل چند نگاشت که با تکنیک برشی حاصل شده اند را با رسم شکل‌شان خواهیم آورد. در اینجا نیز نگاشت تحلیلی با برد CHD مانند F داده شده و با انبساط خاص ω در نظر گرفته می شود، سپس نگاشت همساز تک ارز f که برد CHD است، متناظر با آن ساخته می شود. سرانجام تصویر قرص یکه را تحت F و f آورده ایم:

f	F	–
		$\begin{cases} F = z - \frac{1}{6}z^{3} \\ \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ h = z + \frac{1}{2\sqrt{2}}z^{2} \\ g = \frac{1}{2\sqrt{2}}z^{2} + \frac{1}{6}z^{3} \\ f = z + \frac{1}{2\sqrt{2}}z^{2} \\ +\frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{z}^{2} + \frac{1}{6}\overline{z}^{3} \end{cases}$
		$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^{2} \\ \omega = z \\ h = z \\ g = \frac{1}{2}z^{2} \\ f = z + \frac{1}{2}\overline{z}^{2} \end{cases}$

$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = z^2 \\ h = \log(1+z) \\ g = -z + \frac{1}{2}z^2 \\ \quad + \log(1+z) \\ f = 2\,\mathbf{Re}\,\log(1+z) \\ \quad - \overline{z} + \frac{1}{2}\overline{z}^2 \end{cases}$		
$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = z^3 \\ h = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}) \\ \quad - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ g = -z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ \quad + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}) \\ f = h + \overline{g} \end{cases}$		
$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = z^4 \\ h = \frac{1}{4}\log\frac{(1+z)^2}{1+z^2} + \frac{\tan^{-1} z}{2} \\ g = -z + \frac{1}{2}z^2 \\ + \frac{1}{4}\log\frac{(1+z)^2}{1+z^2} + \frac{\tan^{-1} z}{2} \\ f = h + \overline{g} \end{cases}$		
$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}z^2 \\ h = \log\frac{4}{z^2-2z+4} \\ g = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 \\ \quad + \log\frac{4}{z^2-2z+4} \\ f = h + \overline{g} \end{cases}$		

$\begin{cases} k_0 = \frac{z}{(1-z)^2} \\ \omega = z \\ h = \frac{z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \\ g = \frac{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \\ f = \mathbf{Re}\frac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3} \\ \quad +i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2} \end{cases}$		

در ردیف انتهای جدول، با استفاده از تابع کوبه تحلیلی $k_0(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ و انبساط $\omega = z$ تابع کوئب (احتمالی) همساز [30]

$$f(z) = \mathbf{Re}\,\frac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3} + i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2}$$

ساخته شده است. انتظار می رود این تابع

$$k_{0H}(z) = \mathbf{Re}\,\frac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3} + i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} + \frac{\frac{1}{2}\bar{z}^2+\frac{1}{6}\bar{z}^3}{(1-\bar{z})^3} \in \mathcal{S}_H^\circ \qquad (۸.۲)$$

نقش تابع کرانی را در رده ی $\mathcal{S}_H^\circ$ بازی نماید. تابع $k_{0H}(z)$ قرص $\mathbb{D}$ را به تمام صفحه منهای قسمتی از محور حقیقی منفی، از $-\frac{1}{6}$ تا ∞ می نگارد. ضرایب این تابع در

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) \quad , \quad |b_n| \leqslant \frac{1}{6}(n-1)(2n-1) \qquad (۹.۲)$$

صدق می کنند [۳۰]. البته این مسئله که تمام توابع $f \in \mathcal{S}_H^\circ$ برای تمام اندیسهای n ، ضرایب h و g می بایست در (۹.۲) صدق نمایند هنوز هم مسئله ی باز تلقی می شود. همچنین انتظار می رود که مانند قضیه یک_چهارم کوبه، برد هر تابع در $\mathcal{S}_H^\circ$ شامل قرص $|w| < \frac{1}{6}$ شود اما تاکنون چنین ثابت شده که

لم ۲.۵.۲. [۲۵] برد هر تابع $f \in \mathcal{S}_H^\circ$ شامل قرص $|w| < \frac{1}{16}$ است.

بعنوان مسئله ی باز چنین عنوان می شود که مثالهایی از توابع تک ارز همساز ارائه دهید که انبساط آنها توابع داخلی منفرد[31] و خواص آنها را نیز بررسی نمائید.

[30] Harmonic Koebe function

[31] Singular inner function

۶.۲ توابع همساز ستاره‌گون

از لحاظ تحلیلی تابع همساز f ستاره‌گون است اگر $\arg\{f(e^{i\theta})\}$ یعنی آرگومان باید تابعی غیرنزولی برحسب θ باشد، بعبارتی

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(e^{i\theta})\} \geq ۰$$

رده تمام توابع همساز ستاره‌گون در $\mathcal{S}_H$ با $\mathcal{S}_H^*$ نمایش داده شده که در تحدید به $\mathcal{S}_H^\circ$ بشکل $\mathcal{S}_H^{\circ *}$ مشخص می شود. یکی از شروط کافی برای ستاره‌گونی چنین است:

لم ۱.۶.۲. (سیلورمن [۹۶]، آهوجا[32] [۲]) اگر ضرایب (۴.۲) در $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n| \leqslant ۱$ صدق کنند، آنگاه $f \in \mathcal{S}_H^*$.

زیررده $\mathcal{S}_H^\circ$ از $\mathcal{S}_H$ شامل همه توابع $f \in \mathcal{S}_H$ با شرط $f_{\overline{z}}(۰) = ۱$ است ، پس $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_H^\circ \subset \mathcal{S}_H$. کلونی و شیل_سمال توابع ستاره‌گون در $\mathcal{S}_H$ با عنوان زیررده $\mathcal{S}_H^*$ بررسی کردند. برخلاف ستاره‌گونی در توابع تحلیلی، روی رده ی توابع $\mathcal{S}_H^*$ ستاره‌گونی خاصیتی ارثی نیست، در واقع لزومی ندارد که تصویر هر زیرقرص $|z| < r < ۱$ خود، ناحیه ای ستاره‌گون (نسبت به مبداء) باشد [۳۰، ۳، ۷۹]. بنابراین به خاصیتی نیازمندیم تا ستاره‌گونی را برای توابع همساز موروثی کند:

تعریف ۱.۶.۲. تابع همساز f با شرط $f(۰) = ۰$ را کاملاً ستاره‌گون[33] نامیم اگر هر دایره ی $|z| = r < ۱$ را به صورت یک به یک به منحنی بسته ای که مرز ناحیه ای ستاره‌گون نسبت به مبداء است بنگارد.

در حالت کلی یک تابع کاملاً ستاره‌گون لزوماً تک ارز نیست ([۲۴]، ص۱۴)، ولی می توانیم خود را محدود به $\mathcal{S}_H$ کنیم. قابل توجه اینکه یک نگاشت کاملاً ستاره‌گون جهت نگهدار در $\mathbb{D}$ تک ارز است. برای $f \in \mathcal{S}_H$، خانواده همه توابع کاملاً ستاره‌گون را با $\mathcal{FS}_H^*$ مشخص می کنیم. در ۱۹۸۰ موکانو رابطه ای را بین کاملا ستاره‌گونی عملگر مشتق یک تابع غیرتحلیلی بیان کرد [۶۴]. برای تابع مختلط f عملگر دیفرانسیلی

$$Df = zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}} \tag{۱۰.۲}$$

را در نظر می گیریم. در اینصورت می توان دید که برای تابع مختلط جهت نگهدار $f(z)$ داریم $Df \neq ۰$ و نیز

$$D^۲f = D(Df) = zf_z + \overline{z}f_{\overline{z}} + zzf_{zz} + \overline{zz}f_{\overline{zz}} \tag{۱۱.۲}$$

[32] Ahuja

[33] Fully-starlike

برای تابع مختلط جهت نگهدار $f(z)$، که $Df \neq 0$. اگر برای تمام $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$، و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z) > 0$ بوده و در شرط $\mathbf{Re}\,\dfrac{Df(z)}{f(z)} > 0$ یا $\mathbf{Re}\,\dfrac{D^2 f(z)}{Df(z)} > 0$ برای $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ صدق نماید، سپس f هر دایره $0 < |z| = r < 1$ را به منحنی ساده بسته می نگارد [۶۴]، و از

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \arg\{f(e^{i\theta})\} = \mathbf{Re}\,\frac{Df(z)}{f(z)}$$

داریم:

لم ۲.۶.۲. (موکانو [۶۴]) گیریم $f \in C^1(\mathbb{D})$ تابع مختلطی با $f(0) = 0$ باشد. اگر برای $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z) > 0$ و $\mathbf{Re}\,\dfrac{Df(z)}{f(z)} > 0$ برقرار باشند سپس f در $\mathbb{D}$ تک ارز و کاملاً ستاره‌گون است.

زیر رده ی $\mathcal{S}_H^{\circ *}(\alpha)$ از رده ی توابع $\mathcal{S}_H^{\circ}$ را که به توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه ی α، $(0 \leqslant \alpha < 1)$ معروف است توسط جهانگیری[۳۴] معرفی شد [۴۷] . وی ثابت کرد که $f \in \mathcal{S}_H^{\circ *}(\alpha)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n| \leqslant 1 \qquad (12.2)$$

۷.۲ توابع همساز محدب

می دانیم که f تابعی محدب است اگر در $f(\mathbb{D})$ عبارت $\arg\{\frac{\partial}{\partial\theta} f(e^{i\theta})\}$ تابعی غیرنزولی برحسب θ باشد. بعبارتی دیگر

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta} f(e^{i\theta})\right\} \geq 0$$

رده ی تمام توابع محدب در $\mathcal{S}_H$ را با $\mathcal{K}_H$ نشان داده و زیر رده ی $\mathcal{K}_H^{\circ}$ نیز توابع محدب در $\mathcal{S}_H^{\circ}$ را مشخص می کند.

لم ۱.۷.۲. (کلونی و شیل‌ـسمال [۲۵]) برای f با نمایش کانونی (۳.۲)، اگر $f \in \mathcal{K}_H$ سپس برای $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$|A_n| \leqslant \frac{n-1}{2}|B_1| + \frac{n+1}{2} \;\; , \;\; |B_n| \leqslant \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}|B_1|$$

برای $n \geq 2$ نیز خواهیم داشت $|A_n| < n$ و $|B_n| < n$.

لم ۲.۷.۲. (سیلورمن [۹۶]، [۲]) اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n^2|b_n| \leqslant 1$ سپس $f \in \mathcal{K}_H$.

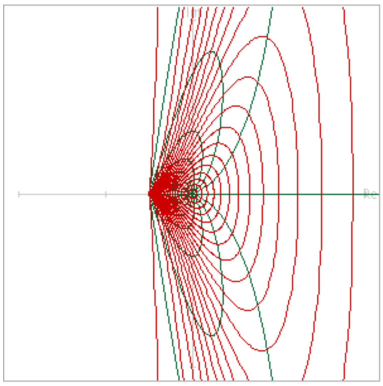
برخلاف توابع تحلیلی، تحدب روی رده ی $\mathcal{K}_H$ خاصیتی موروثی ندارد، یعنی لازم نیست که تصویر هر زیرقرص $|z| < r < 1$ تحت f خود ناحیه ای محدب باشد. اگر f نگاشتی تک ارز

[۳۴] Jahangiri

روی $\mathbb{D}$ به ناحیه ای محدب باشد، آنگاه تصویر هر قرص $|z| < r$ برای هر شعاع $r \leqslant \sqrt{2} - 1$ محدب خواهد بود ولی برای شعاعی در بازه ی $\sqrt{2} - 1 < r < 1$ این موضوع درست نیست.
کافی است تابع

$$f(z) = \mathbf{Re}\frac{z}{1-z} + i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} + \frac{-\frac{1}{2}\bar{z}^2}{(1-\bar{z})^2} \in \mathcal{K}_H \qquad (۱۳.۲)$$

را در نظر بگیریم که $\mathbb{D}$ را به نیم صفحه ی $\mathbf{Re}\, w > -\frac{1}{2}$ می نگارد. تصویر هر قرص $|z| \leqslant r$ برای هر r در $\sqrt{2} - 1 < r < 1$ محدب نیست (شکل ۴.۲).



شکل ۴.۲: تصویر قرص $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همساز (۱۳.۲).

لازم است تعریفی ارائه دهیم که خاصیت ارثی تحدب را منتقل نماید:

تعریف ۱.۷.۲. [۲۴، ۷۹] تابع همساز f روی قرص واحد را کاملاً محدب[۳۵] نامیم اگر $f(0) = 0$ بوده و هر دایره ی $|z| = r < 1$ را در وضعیتی یک به یک به مرز یک ناحیه محدبی در برد بنگارد.

در حالت خاصی که برای $0 < |z| < 1$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ طبق قضیه ی رادو[۳۶]ـ کنزه[۳۷]ـ چوکه[۳۸] نگاشت کاملاً محدب در $\mathbb{D}$ لزوماً تک ارز خواهد شد ([۳۰]، بخش ۱.۳).
زیررده ی تمام توابع کاملاً محدب از توابع $\mathcal{S}_H$ را در $\mathbb{D}$ با $\mathcal{FK}_H$ نشان می دهیم. اگر برای همه ی $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z) > 0$ باشد، آنگاه [۶۴]

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\} = \mathbf{Re}\,\frac{D^2 f(z)}{Df(z)}$$

بنابراین

[۳۵] Fully-convex
[۳۶] Radó
[۳۷] Kneser
[۳۸] Choquet

لم ۳.۷.۲. (موکانو [۶۴]) گیریم $f \in C^{2}(\mathbb{D})$ تابعی مختلط باشد که $f(0) = 0$، برای همه ی $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z) > 0$ بوده و $\mathbf{Re}\,\dfrac{D^{2}f(z)}{Df(z)} > 0$ باشد، آنگاه f در $\mathbb{D}$ تک ارز و کاملاً ـ محدب است.

تابع همساز f تک ارز و محدب است اگر و فقط اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، تابع تحلیلی $e^{i\alpha}h - e^{i\alpha}g$ تک ارز و محدب در جهت افقی باشد. علاوه بر این، شرطی لازم و کافی برای آنکه تابعی کاملاً محدب باشد توسط چوکه[۳۹]، دورن[۴۰] و آسگود[۴۱] مطرح شد ([۲۴] ص۱۳۹).

قضیه ۱.۷.۲. [۲۴] گیریم $f(z) \in \mathcal{S}_H$. $f \in \mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر

$$|zh'(z)|^{2}\mathbf{Re}\, Q_h \geqslant |zg'(z)|^{2}\mathbf{Re}\, Q_g + \mathbf{Re}\left\{z^{3}\left(h''(z)g'(z) - h'(z)g''(z)\right)\right\} \tag{۱۴.۲}$$

که $Q_h = 1 + z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}$ و $Q_g = 1 + z\dfrac{g''(z)}{g'(z)}$ بازای هر z در $\mathbb{D}$.

تابع همساز تک ارز f در D را محدب در جهت α گوئیم اگر $f(\mathbb{D})$ محدب در جهت α باشد. رده ی $\mathcal{K}_H^{\circ}(\alpha)$ از زیر رده های $\mathcal{S}_H^{\circ}$ شامل همه ی توابع محدب از مرتبه ی α، $(0 \leqslant \alpha < 1)$ است که در شرط

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\} \geq \alpha$$

صدق می کنند و داریم

لم ۴.۷.۲. (جهانگیری [۴۷]) اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n| \leqslant 1 \tag{۱۵.۲}$$

آنگاه $f \in \mathcal{K}_H^{\circ}(\alpha)$.

۸.۲ توابع همساز نزدیک ـ به ـ محدب

تابع همساز $f(z) \in \mathcal{S}_H$ را نزدیک به محدب گوئیم اگر بردش $f(\mathbb{D})$ دامنه ای نزدیک ـ به ـ محدب باشد. رده ی همه ی توابع نزدیک ـ به ـ محدب از $\mathcal{S}_H$ را با $\mathcal{C}_H$ نشان داده و زیر رده ی محدود به $\mathcal{S}_H^{\circ}$ را با $\mathcal{C}_H^{\circ}$ مشخص می کنیم.

لم ۱.۸.۲. [۲۵] گیریم $f = h + \overline{g}$ در $\mathbb{D}$ موضعا تک ارز بوده و $h + \epsilon g$ برای $|\epsilon| \leqslant 1$ ی محدب باشد، آنگاه f در $\mathbb{D}$ تک ارز و نزدیک ـ به ـ محدب است.

---
[۳۹] Martin Chuaqui
[۴۰] Peter Duren
[۴۱] Brad Osgood

۹.۲ پیچش

پیچش دو تابع همساز $f(z)$ و $F(z)$ با نمایش های کانونی

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} \overline{b_n} \overline{z}^n \tag{۱۶.۲}$$

$$F(z) = H(z) + \overline{G(z)} = z + \sum_{n=۲}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} \overline{B_n} \overline{z}^n \tag{۱۷.۲}$$

چنین تعریف می شود:

$$(f * F)(z) = (h * H)(z) + \overline{g * G(z)} = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n A_n z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} \overline{b_n B_n} \overline{z}^n \tag{۱۸.۲}$$

برخلاف حالت تحلیلی، پیچش دو تابع همساز لزوماً خواص رده را حفظ نمی کند. مثلاً گیریم

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \frac{z}{۱ - z}$$

با انبساط $\omega(z) = -z$ باشد پس $f \in \mathcal{K}_H^{\circ}$ و

$$F(z) = H(z) + \overline{G(z)} = \frac{z}{۱ - z}$$

با انبساط $\omega(z) = -z^n$ را نیز در نظر بگیرید که $F \in \mathcal{K}_H^{\circ}$ خواهد بود. برای $n \in \mathbb{N}$ (که $n \geq ۳$)، پیچش $(f * F)(z)$ در $\mathbb{D}$ حتی موضعاً تک ارز هم نیست [۲۹].

لم ۱.۹.۲. (کلونی و شیل_سمال [۲۵]) اگر $\phi \in \mathcal{K}$ و $F \in \mathcal{K}_H$ آنگاه

$$(\phi + \epsilon\overline{\phi}) * F \in \mathcal{C}_H$$

بازای $|\epsilon| \leqslant ۱$.

آهوجا و دیگران [۲] نشان دادند که در لم فوق، شرط تحدب ϕ را نمی توان با ستاره‌گونی تعویض نمود. برای مثال تابع تحلیلی ستاره‌گون $\phi(z) = z + \frac{۱}{n} z^n$ در $\mathbb{D}$ را با $\epsilon = ۰$ در نظر بگیرید. فرض کنید

$$F(z) = h + \overline{g} = \frac{z - \frac{۱}{۲} z^۲}{(۱ - z)^۲} + \frac{-\frac{۱}{۲} \overline{z}^۲}{(۱ - \overline{z}^۲)^۲} \in \mathcal{K}_H$$

در اینصورت تابع پیچش

$$(\phi + ۰\overline{\phi}) * F = z + \frac{n + ۱}{۲n} z^n \;\;,\;\; n \geq ۲$$

حتی در $\mathbb{D}$ تک ارز هم نخواهد بود.

لم ۲.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) گیریم h و g در $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده و $|g'(0)| < |h'(0)|$ باشد و نیز $h+\epsilon g$ در $\mathbb{D}$ برای هر $|\epsilon| = 1$ نزدیک‌ـبه‌ـمحدب شود. در اینصورت

$$h+\overline{g} \in \mathcal{C}_H$$

اگر ϕ در $\mathbb{D}$ تحلیلی و محدب باشد آنگاه

$$(\phi+\sigma\overline{\phi}) * (h+\overline{g}) \in \mathcal{C}_H \quad , \quad |\sigma| = 1$$

کلونی و شیل‌ـسمال در مقاله ی خود سوالی در این موضوع را مطرح نمودند که برای چه توابع همساز ϕ ی با $f \in \mathcal{K}_H$، خواهیم داشت $\phi * f \in \mathcal{K}_H$. این سوال به طور جزئی توسط روشه ویه و سالیناس[۴۲] [۹۱] پاسخ داده شد. آنها ثابت کردند که اگر ϕ در $\mathbb{D}$ تحلیلی باشد سپس برای هر $F \in \mathcal{K}_H$، $\phi * F = \phi * \mathbf{Re}\, F + \overline{\phi * \mathbf{Im} F} \in \mathcal{K}_H$ اگر و تنها اگر برای هر عدد حقیقی γ تابع $\phi + i\gamma z\phi'$ در جهت محور موهومی محدب شود.

لم ۳.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) گیریم h و ϕ در $\mathbb{D}$ تحلیلی محدب و g هم در آنجا تحلیلی باشد چنانکه $|g'(z)| < |h'(z)|$ برای $z \in \mathbb{D}$. آنگاه برای هر $|\epsilon| \leqslant 1$،

$$(\phi+\epsilon\overline{\phi}) * (h+\overline{g}) \in \mathcal{C}_H$$

قضیه ی زیر نیز شرط لازم و کافی برای اینکه تابعی در توابع همساز ستاره‌گون واقع شود را بیان می دارد:

قضیه ۱.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) فرض کنید $f = h+\overline{g} \in \mathcal{S}_H$ سپس $f \in \mathcal{S}_H^*$ اگر و تنها اگر

$$h(z) * \frac{z+\frac{1}{2}(\zeta-1)z^2}{(1-z)^2} - \overline{g(z) * \frac{\zeta\overline{z}-\frac{1}{2}(\zeta-1)\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^2}} \neq 0 \quad ; \quad |\zeta| = 1,\ 0 < |z| < 1$$

نتیجه ۱.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) فرض کنید $f = h+\overline{g} \in \mathcal{S}_H$، اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \leqslant 1$$

آنگاه $f \in \mathcal{S}_H^*$.

قضیه ی زیر نیز شرط لازم و کافی برای آنکه تابع همسازی محدب باشد را عنوان می کند:

[۴۲] Salinas

قضیه ۲.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) فرض کنید $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H$، سپس $f\in\mathcal{K}_H$ اگر و تنها اگر

$$h(z)*\frac{z+\zeta z^{2}}{(1-z)^{3}}+\overline{g(z)}*\frac{\zeta\overline{z}+\overline{z}^{2}}{(1-\overline{z})^{3}}\neq 0\ ;\ \ |\zeta|=1,\ 0<|z|<1$$

نتیجه ۲.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) گیریم $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H$، اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^{2}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}|b_n|\leqslant 1$$

دراینصورت $f\in\mathcal{K}_H$.

کومار[43] و دیگران [۵۱] هم برخی نتایجی را بر اساس نامساوی هایی که روی ضرایب توابع همساز محدب ۱.۷.۲ برقرار است را بدست آوردند (۲۰۱۲) که نتایج مفیدی از پیچش دربرداشت:

لم ۴.۹.۲. [۵۱] فرض کنید که f ، F و $f*F$ به ترتیب دارای نمایش هایی بفرم ۱۶.۲ـ۱۸.۲ باشند، در اینصورت

- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^{3}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^{3}|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{0}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{K}_H^{0}$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^{2}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^{2}|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{0}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{S}_H^{*0}$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^{3}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^{3}|b_n|\leqslant 1-|b_1|$ و $F\in\mathcal{K}_H$، آنگاه $f*F\in\mathcal{K}_H$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^{2}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^{2}|b_n|\leqslant 1-|b_1|$ و $F\in\mathcal{K}_H$، آنگاه $f*F\in\mathcal{S}_H^{*}$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{0}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{S}_H^{*0}(\alpha)$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{2}(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{2}(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{0}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{K}_H^{0}$.
- فرض کنید $\sum_{n=2}^{\infty}n^{3}|a_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H$، اگر $f*F$ موضعاً تک ارز باشد، آنگاه $f*F\in\mathcal{C}_H$.

اگر $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H^{0}$ قرص $\mathbb{D}$ را به نیم صفحه راست $\{w:\textbf{Re}\,w>\frac{1}{2}\}$ بنگارد، سپس باید در $h+g=\dfrac{z}{1-z}$ صدق نماید.

مجموعه توابع $f=h+\overline{g}$ که $\mathbb{D}$ را به نیم صفحه راست $R=\{w:\textbf{Re}\ w>-\frac{1}{2}\}$ می نگارد دارای شکل کلی

$$h(z)+g(z)=\frac{z}{1-z}$$

است که $\dfrac{z}{1-z}$ تابع اکستریمال رده ی $\mathcal{K}$ است و این توابع $\mathbb{D}$ را به نوار عمودی

$$R=\left\{w:\frac{\alpha-\pi}{2\sin\alpha}<\textbf{Re}\ w<\frac{\alpha}{2\sin\alpha}\right\}\tag{۱۹.۲}$$

[43] Kumar

می نگارند و دارای شکل کلی زیرند:

$$h(z)+g(z)=\frac{1}{2i\sin\alpha}\log\frac{1+ze^{i\alpha}}{1+ze^{-i\alpha}}$$

لم ۵.۹.۲. (دورف[۴۴] [۲۸]) فرض کنید $f_1=h_1+\overline{g_1}\in\mathcal{K}_H^{\circ}$ با $h_1+g_1=\frac{z}{1-z}$ و نیز $f_2=h_2+\overline{g_2}\in\mathcal{K}_H^{\circ}$ با $h_2+g_2=\frac{z}{1-z}$ باشد. اگر f_1*f_2 موضعا تک ارز و جهت نگهدار باشند، آنگاه $f_1*f_2\in\mathcal{S}_H^{\circ}$ و محدب در جهت محور طولهاست.

۱۰.۲ زیررده هائی مرتبط با پیچش

بین سالهای ۱۹۹۸ و ۲۰۰۸، زیررده هایی از $\mathcal{S}_H$ توسط مولفانی معرفی و بررسی شد مانند جهانگیری ([۴۶]، ۱۹۹۸)، سیلورمن ([۹۶]، ۱۹۹۸)، جهانگیری ([۴۷]، ۱۹۹۹)، جهانگیری، موروگوروموری[۴۵] و وی جی[۴۶] ([۴۸]، ۲۰۰۲)، آهوجا، جهانگیری و سیلورمن ([۲]، ۲۰۰۳)، موروگوروموری ([۶۶]، ۲۰۰۳)، یالسین[۴۷]، اوزترک[۴۸] و یامانکارادنیز[۴۹] ([۱۱۹]، ۲۰۰۷) و نیز الشقصی[۵۰] و داروس[۵۱] ([۸]، [۹]، ۲۰۰۸) که هر کدام به نوعی در یافتن شروطی لازم و کافی در زیررده های معرفی شده کوشیدند. در ۲۰۱۰، علی[۵۲]، استفان[۵۳] و سوبرامانیان[۵۴] زیررده ای از $\mathcal{S}_H$ را معرفی کردند که اکثر زیررده های قبل را بعنوان حالتی خاص در بر می گرفت. آنها تعریف زیر را ارائه دادند [۶]:

تعریف ۱.۱۰.۲. فرض کنید σ ثابتی حقیقی بوده و $\phi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\phi_n z^n$ تابعی مفروض است که روی $\mathbb{D}$ تحلیلی می باشد. تابع همساز $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H^{\circ}$ متعلق به رده ی $\mathcal{S}_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ است اگر

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{z(h*\phi)'(z)-\sigma\overline{z(g*\phi)'(z)}}{(h*\phi)(z)+\sigma\overline{(g*\phi)(z)}}\right\}>\alpha\ ,\ z\in\mathbb{D} \tag{۲۰.۲}$$

که $0\leqslant\alpha<1$.

این تعریف در حالات خاصی زیررده های قبلی را شامل می شود مثلاً

[۴۴] Dorff
[۴۵] Murugusundaramoorthy
[۴۶] Vijaya
[۴۷] Yalçin
[۴۸] Öztürk
[۴۹] Yamankaradeniz
[۵۰] Al-Shaqsi
[۵۱] Darus
[۵۲] Ali
[۵۳] Stephen
[۵۴] Subramanian

$\mathcal{S}_H^{*\circ} = \mathcal{S}_H^\circ\left(\frac{z}{1-z}, 1, 0\right)$ سیلورمن ([۹۶]، ۱۹۹۸).

$\mathcal{K}_H^{\circ} = \mathcal{S}_H^\circ\left(\frac{z}{(1-z)^2}, 1, 0\right)$ سیلورمن ([۹۶]، ۱۹۹۸).

$\mathcal{S}_H^{*\circ} = \mathcal{S}_H^\circ\left(\frac{z}{1-z}, 1, \alpha\right)$ جهانگیری ([۴۶]، ۱۹۹۸)، ([۴۷]، ۱۹۹۹).

$\mathcal{K}_H^{\circ} = \mathcal{S}_H^\circ\left(\frac{z}{(1-z)^2}, -1, \alpha\right)$ جهانگیری ([۴۶]، ۱۹۹۸)، ([۴۷]، ۱۹۹۹).

$H(p,\alpha) = \mathcal{S}_H^\circ\left(z + \sum_{n=2}^{\infty} n^p z^n, (-1)^p, \alpha\right)$ که عملگر سالاگان[۵۵] تغییریافته است که توسط جهانگیری، موروگورومورثی و وی جی مطالعه شد ([۴۸]، ۲۰۰۲).

$R_H(\lambda,\alpha) = \mathcal{S}_H^\circ\left(\frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}}, 1, \alpha\right)$ به شرط $\lambda > -1$ که شامل عملگر مشتق روشه ویه است و توسط موروگورومورثی بررسی شد ([۶۶]، ۲۰۰۳).

$H(p,\alpha) = \mathcal{S}_H^\circ\left(z + \sum_{n=2}^{\infty} n^p C(\lambda,n) z^n, (-1)^p, \alpha\right)$ که $C(\lambda,n) = \frac{(\lambda+1)_{n-1}}{(n-1)!}$ و $(\lambda+1)_{n-1} = (\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n-1)$ که بدینصورت رده ی $M_H(1,\lambda,\alpha)$ را مشخص می کند که توسط الشقصی و داروس مطالعه شد ([۸، ۹]، ۲۰۰۸).

در واقع رده ی $\mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ این تعداد از زیررده های قبلی را روی توابع همساز متحد و یکپارچه می کند و نتایج زیر را بدست می دهد:

قضیه ۲.۱۰.۱. ([۶]) گیریم $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^\circ$، سپس $f \in \mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر و فقط اگر

$$(h*\phi)*\left[\frac{z + \frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha}z^2}{(1-z)^2}\right] - \sigma\overline{(g*\phi)*\left[\frac{\frac{x+\alpha}{1-\alpha}\overline{z} - \frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha}\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^2}\right]} \neq 0\ ;\ |x|=1\,,\ |z|\neq 0. \quad (۲.۲۱)$$

شرطی کافی برای آنکه تابع همسازی در رده ی $\mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ قرار گیرد عبارتست از

قضیه ۲.۱۰.۲. ([۶]) گیریم $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^\circ$، آنگاه $f \in \mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n||\phi_n| + |\sigma|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n||\phi_n| \leqslant 1. \quad (۲.۲۲)$$

علاوه بر این، مولفان مذکور مجموعه ای دیگر از توابع همساز را که قبلا توسط مولفان دیگر بررسی شده بود را یکپارچه نمودند. این رده ها شامل رده هائی از توابع تحلیلی محدب یکنواخت و توابع ستاره‌گون سهموی هستند [۸۷]. چنین زیررده هائی از توابع همساز شامل رده های $G_H(\alpha)$ و $GK_H(\alpha)$ از توابع همساز نوع گودمن-رونینگ[۵۶] هستند که در [۸۹، ۹۰] مطالعه

[۵۵] Salagean

[۵۶] Goodman-Rønning-type harmonic functions

شده و نیز رده های $RS_H(p,\gamma)$ [۱۱۹] و $M_H(n,\alpha)$ [۹] است که به ترتیب شامل عملگر نوع سالاگان[۵۷] و عملگر روشه ویه[۵۸] هستند. سپس تعریف زیر ارائه شد:

تعریف ۲.۱۰.۲. گیریم σ ثابتی حقیقی بوده و $\phi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\phi_n z^n$ تابعی مفروض باشد که روی $\mathbb{D}$ تحلیلی است. تابع همساز $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H^{\circ}$ در رده ی $\mathcal{SP}_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ است اگر

$$\mathbf{Re}\left\{(1+e^{i\gamma})\frac{z(h*\phi)'(z)-\sigma\overline{z(g*\phi)'(z)}}{(h*\phi)(z)+\sigma\overline{(g*\phi)(z)}}-e^{i\gamma}\right\}>\alpha \quad ; \quad z\in\mathbb{D} \tag{۲۳.۲}$$

با $\gamma\in\mathbb{R}$ و $0\leq\alpha<1$.

قضیه ۳.۱۰.۲. ([۶]) فرض کنید $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H^{\circ}$. آنگاه $f\in\mathcal{SP}_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر و فقط اگر

$$(h*\phi)*\left[\frac{z+\frac{(x+1)e^{i\gamma}+x+2\alpha-1}{2-2\alpha}z^2}{(1-z)^2}\right]-\sigma\overline{(g*\phi)}*\left[\frac{\frac{(x+1)e^{i\gamma}+x+\alpha}{1-\alpha}\overline{z}-\frac{(x+1)e^{i\gamma}+x+2\alpha-1}{2-2\alpha}\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^2}\right]\neq 0 \ ; \ |x|=1\,,\ |z|\neq 0. \tag{۲۴.۲}$$

قضیه ۴.۱۰.۲. ([۶]) گیریم $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H^{\circ}$، سپس $f\in\mathcal{SP}_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1-\alpha}{1-\alpha}|a_n||\phi_n|+|\sigma|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1+\alpha}{1-\alpha}|b_n||\phi_n|\leqslant 1. \tag{۲۵.۲}$$

۱۱.۲ رده ی $\mathcal{T}_H$

چندین زیررده از توابع تحلیلی با ضرایب منفی توسط سیلورمن بررسی شد [۹۷]. یک اتحاد و یکپارچگی از توابع تحلیلی با ضرایب منفی pــمقداری توسط [۴] معرفی شد که روی پیچش عمل می کردو شامل چند زیررده از توابع تحلیلی با ضرایب منفی بود که قبلا مطالعه شده بودند.

گیریم $\mathcal{T}_H(\alpha)$ زیررده ای از $\mathcal{S}_H$ شامل تمام توابع همساز $f=h+\overline{g}$ است که که ضرایب ناصفرشان در بسط سری تابع تحلیلی h، از دومی به بعد منفی اند، یعنی

$$h(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n \quad , \quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|z^n$$

و نیز در شرط زیر صدق می نمایند

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(re^{i\theta})\}\geq\alpha$$

[۵۷] Salagean-type operator

[۵۸] Ruscheweyh operator

که $r < 1 = |z|$ و $1 > \alpha \geqslant 0$. این رده در ۱۹۹۹ توسط جهانگیری معرفی شد [۴۷]. اژی لارسی[۵۹] و سوداراسان[۶۰] [۳۵] رده ی $\mathcal{S}_H^*(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$ از توابع همساز در $\mathcal{S}_H$ که در شرط

$$\mathbf{Re}\left\{(1+ke^{i\alpha})\frac{(z(h*\phi)'-\overline{z(g*\psi)'})}{z'((1-\lambda)z+\lambda((h*\phi)+\overline{(g*\psi)})}-ke^{i\alpha}\right\}\geq\gamma$$

برای همه α حقیقی صدق می کنند را بررسی نمودند (۲۰۱۳). در این تعریف $\phi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n z^n$، $\psi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n z^n$ با شروط $\lambda_n\geq 0$، $\mu_n\geq 0$، $0\leqslant\lambda\leqslant 1$، $z'=\frac{\partial}{\partial\theta}(z=re^{i\theta})$، $0\leqslant r<1$، $0\leqslant\theta<2\pi$ و $0\leqslant\gamma<1$ تحلیلی اند. همچنین با فرض $\overline{\mathcal{S}_H^*}(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$ نمایش رده ی $\mathcal{S}_H^*(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$ شامل توابع $f=h+\overline{g}\in\mathcal{T}_H$ می شود.

ملاحظه ۱.۱۱.۲. بازای $\alpha=0$،

$$\overline{\mathcal{S}_H^*}\left(\frac{z}{1-z},\frac{z}{1-z},1,\gamma,1\right)=\mathcal{T}_H\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

لم ۱.۱۱.۲. [۳۵] فرض کنید تابع $f=h+g$ چنان باشد که h و g با (۲.۳) داده شده و نیز بگیرید

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n(1+k)-\lambda(k+\gamma)}{1-\gamma}\right)\lambda_n|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n(1+k)+\lambda(k+\gamma)}{1-\gamma}\right)\mu_n|b_n|\leqslant 1$$

که $k\geq 0$، $\lambda_n\geq 0$، $\mu_n\geq 0$، $0\leqslant\lambda\leqslant 1$، $0\leqslant\gamma\leqslant 1$، α عدد حقیقی و اگر

$$n(1-\gamma)\leqslant\big(n(1+k)-\lambda(k+\gamma)\big)\lambda_n\leqslant\big(n(1+k)+\lambda(k+\gamma)\big)\mu_n$$

آنگاه f نگاشتی همساز تک ارز جهت نگهدار در $\mathbb{D}$ بوده و برای $\lambda=\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$، $f\in\mathcal{S}_H^*(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$.

اکنون توجه خود را به زیررده ی $TS_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ از $S_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ معطوف می کنیم که شامل توابع همساز $f=h+\overline{g}$ به شکل

$$h(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \quad , \quad g(z)=\sigma\sum_{n=2}^{\infty}b_n z^n \quad ; \quad a_n\geq 0,\ b_n\geq 0 \qquad (26.2)$$

هستند. زیررده $TS_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ شامل حالات خاصی است که قبلا در [۸، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۶۶] مطالعه شده اند.

[۵۹] Ezhilarasi
[۶۰] Sudharsan

قضیه ۱.۱۱.۲. ([۶]) فرض نمائید $\phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n z^n$ با $\phi_n \geqslant 0$ بوده و f به شکل ۲۶.۲ باشد. آنگاه $f \in TS_H^{\circ}(\phi, \sigma, \alpha)$ اگر و فقط اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} a_n \phi_n + \sigma^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha} b_n \phi_n \leqslant 1. \tag{۲۷.۲}$$

یک کران ظریف برای $|f(z)|$ که $f \in TS_H^{\circ}(\phi, \sigma, \alpha)$ چنین بدست می آید:

نتیجه ۱.۱۱.۲. ([۶]) گیریم $\phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n z^n$ با $\phi_n \geqslant \phi_2 (n \geqslant 2)$ بوده و $|\sigma| \geqslant \frac{2-\alpha}{2+\alpha}$ باشد. اگر $f \in TS_H^{\circ}(\phi, \sigma, \alpha)$ باشد سپس برای $|z| = r < 1$

$$r - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\phi_2} r^2 \leqslant |f(z)| \leqslant r + \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\phi_2} r^2 \tag{۲۸.۲}$$

این نتیجه بازای تابع $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\phi_2} z^2$ ظریف بوده و تساوی را برقرار می کند.

چنانکه پیداست برد توابع موجود در $TS_H^{\circ}(\phi, \sigma, \alpha)$ قرص $|w| < 1 - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\phi_2}$ را می پوشانند. همچنین رده ی $TS_H^{\circ}(\phi, \sigma, \alpha)$ محدب بوده و نقاط اکستریمال رده ی $TS_H^{\circ}(\phi, \sigma, \alpha)$ را می توان چنین یافت:

قضیه ۲.۱۱.۲. ([۶]) گیریم

$$h_1(z) := z \quad , \quad h_n(z) := z - \frac{1-\alpha}{(n-\alpha)\phi_n} z^n \quad , \quad g_n(z) := z + \frac{1-\alpha}{\sigma(n+\alpha)\phi_n} \overline{z}^n \tag{۲۹.۲}$$

برای $n = 2, 3, \cdots$. یک تابع $f \in TS_H^{\circ}(\phi, \sigma, \alpha)$ اگر و فقط اگر f را بتوان بصورت

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n h_n + \gamma_n g_n), \tag{۳۰.۲}$$

بیان کرد که $\lambda_n \geqslant 0$، $\gamma_n \geqslant 0$، $\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} (\lambda_n + \gamma_n)$ و $\gamma_1 = 0$ است. در حالت خاص نقاط اکستریم $TS_H^{\circ}(\phi, \sigma, \alpha)$ عبارتند از $\{h_n\}$ و $\{g_n\}$.

مراجع

[۱] سیلورمن هرب (۱۳۶۹)، **متغیرهای مختلط**، ترجمه محسن نقشینه ارجمند، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه اصفهان.

[2] Ahuja Om P., Jahangiri J. M. and Silverman H. (2003), ”Convolutions for special classes of harmonic univalent functions”, **Applied Mathematics Letters**, 16 (6), pp. 905-909.

[3] Ahuja Om P. (2005), ”Planar harmonic univalent and related mappings”, **J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 6 (4), Art-122.

[4] Ali R. M., Khan M. H., Ravichandran V. and Subramanian K. G. (2006), ”A class of multivalent functions with negative coefficients defined by convolution”, **Bull. Korean Math. Soc.**, 43 (1), 179-188.

[5] Ali R. M. and Ravichandran V. (2011), ”Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions”, **Mathematics Newsletter, Ramanujan Mathematical Society**, 21 (1), pp. 16-30.

[6] Ali R. M., Stephen B. A. and Subramanian K. G. (2010), ”Subclasses of harmonic mappings defined by convolution”, **Applied Mathematics Letters**, Vol. 23 (10).

[7] Al-Amiri H. and Mocanu P. T. (1981), ”Spirallike nonanalytic functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 82 (1), pp. 61-65.

[8] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), ”On Harmonic Functions Defined by Derivative Operator”, **J. Inequal. Appl.**, 10 pp. Art. ID 263413.

[9] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), ”On Goodman-Ronning-Type harmonic univalent functions defined by Ruscheweyh operator”, **Int. Math.**, Forum 3, no. 44, pp.2161-2174.

[10] Azizi S., Ebadian A. and Najafzadeh Sh. (2015), ”Coefficient Estimates for a Subclass of Bi-univalent Functions”, **Comm. Adv. Comp. Sci. App.**, 1, pp. 41-44.

[11] Bazilevič I. E. (1955), ”On a case of integrability in quadratures in the Loewner-Kufarev equation” (Russian), **Mat. Sb. (N.S.)**, 37 (79)(3), pp. 471-476.

[12] Bieberbach L. (1916), ”Ober die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln”, **Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften**, pp. 940-955.

[13] Brannan D. A. and Clunie J. G. (1980), ”**Aspects of Contemporary Complex Analysis**”, Academic Press, NY.

[14] Brannan D. A., Clunie J. G. and Kirwan W. E. (1970), ”Coefficient estimates for a class of starlike functions”, **Can. J. Math.**, 22, pp. 476-485.

[15] Brannan D. A. and Kirwan W. E. (1969), ”On some classes of bounded univalent functions”, **J. London Math. Soc.**, 1 (2), pp. 431-443.

[16] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), ”On some classes of bi-univalent functions”, **Studia Univ. Babes-Bolyai Math.**, 31 (2), pp. 70-77.

[17] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), ”On some classes of bi-univalent functions”, **KFAS Proceedings Series, v. 3, Pergamon Press (Elsevier Science Limited), Oxford**, pp. 53-60.

[18] Brown J. E. (1989), ”Images of disks under convex and starlike functions”, **Math. Z.**, 202 (4), pp. 457-462.

[19] Çaglar M., Deniz E. and Srivastava H. M. (2017), ”Second Hankel determinant for certain subclasses of bi-univalent functions”, **Turkish J. Math.**, 41, pp. 694-706.

[20] Çaglar M., Orhan H. and Yagmur N. (2012), ”Coefficient Bounds For New Subclasses of Bi-Univalent Functions”, **Faculty Sci. Math. Uni. Nis, Serbia**, 27 (7), pp. 1165-1171.

[21] Chen M. (1975), ”On the regular functions satisfying $\mathbf{Re}\,\frac{f(z)}{z} > \alpha$”, **Bull. Inst. Math. Acad. Sinica**, 3, pp. 65-70.

[22] Catas A., Oros G. I. and Oros G. (2008), ”Differential subordinations associated with multiplier transformations”, **Abstr. Appl. Anal.**, ID 845724:1-11.

[23] Chichra P. N. (1977), ”New subclasses of the class of close-to-convex functions”, **Proc. Am. Math. Soc.**, 62, pp. 37-43.

[24] Chuaqui M., Duren P. and Osgood B. (2004), ”Curvature properties of planar harmonic mappings”, **Comput. Methods Funct. Theory**, 4 (1), pp. 127-142.

[25] Clunie J. and Sheil-Small T. (1984), ”Harmonic Univalent Functions”, **Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.**, 9 (2), pp. 3-25.

[26] de Branges L. (1985), ”A proof of the Bieberbach conjecture”, **Acta Mathematica**, 154, pp. 137-152.

[27] Ding S. S., Ling Y. and Bao G. J. (1995), ”Some properties of a class of analytic functions”, **J. Math. Anal. Appl.**, 195 (1), pp. 71-81.

[28] Dorff M. (2001), ”Convolutions of planar harmonic convex mappings”, **Comp. Var. Theory Appl.**, 45 (3), pp. 263-271.

[29] Dorff M., Nowak M. and Woloszkiewicz M. (2012), ”Convolutions of harmonic convex mappings”, **Complex Variables and Elliptic Equations**, 57 (5), pp. 489-504.

[30] Duren P. L. (2004), ”**Harmonic Mappings in the Plane**”, Cambridge Tracts in Mathematics, 156, Cambridge University Press, Cambridge.

[31] Duren P. L. (1983), ”**Univalent Functions**”, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg and Tokyo.

[32] Dziok J. and Srivastava H. M. (1999), ”Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function”, **Appl. Math. Comput.**, 103, pp. 1-13.

[33] Eenigenburg P. J., Miller S. S., Mocanu P. T. and Reade M. O. (1974), ”On a subclass of Bazilevič functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 45, pp. 88-92.

[34] El-Ashwah R. M. (2014), ”Subclasses of bi-univalent functions defined by convolution”, **J. Egypt. Math. Soc.**, 22 (3), pp. 348-351.

[35] Ezhilarasi R. and Sudharsan T. V. (2013), ”A Subclass of Harmonic Functions Associated with a Convolution Structure”, **Ann. Pure & App. Math.**, 4 (2), pp. 182-191.

[36] Frasin B. A. and Aouf M. K. (2011), ”New subclasses of bi-univalent functions”, **Appl. Math. Lett.**, 24, pp. 1569-1573.

[37] Ganenkova E. and Starkov V. V. (2015), ”Regularity theorems for harmonic functions”, **J. Appl. Anal.**, 21 (1), 1-12.

[38] Garabedian P. R. and Schiffer M. (1955), ”A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 4, pp. 427-455.

[39] Gilman J. P., Kra I. and Rodr guedriguez R. E. (2007), ”**Complex Analysis**”, Springer.

[40] Goodman A. W. (1991), ”On Uniformly Convex Functions”, **Ann. Polon. Math.**, 56, pp. 87-92.

[41] Goodman A. W. (1991), ”On Uniformly Starlike Functions”, **J. Math. Ana. & App.**, 155, pp. 364-370.

[42] Goodman A. W (1983)., ”**Univalent Functions**”, Polygonal, Washington, NJ.

[43] Hallenbeck D. J. and Ruscheweyh St. (1975), ”Subordination by convex functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 52, pp. 191-195.

[44] Hernandez R. and Martn M. J. (2013), ”Stable geometric properties of analytic and harmonic functions”, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 155 (2), pp. 343-359.

[45] Horowitz D. (1978), ”A Further Refinement for Coefficient Estimates of Univalent Functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 71, 217-221.

[46] Jahangiri J. M. (1998), ”Coefficient bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska Sect.**, A 52 (2), 57-66.

[47] Jahangiri J. M. (1999), ”Harmonic Functions Starlike in the Unit Disk”, **J. Math. Anal. Appl.**, 235 (2), pp. 470-477.

[48] Jahangiri J. M., Murugusundaramoorthy G. and Vijaya K. (2002), ”Salagean-type harmonic univalent functions”, **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 77-82 (electronic).

[49] Kim Y. C. and Ponnusamy S. (1999), ”Sufficiency for gaussian hypergeometric functions to be uniformly convex”, **Internat. J. Math. Math. Sci.**, 22 (4), 765-773.

[50] Kulshrestha P. K. (1973), ”Generalized Convexity in Conformal Mappings”, **J. Math. anal. App.**, 3, pp. 441-449.

[51] Kumar R., Gupta S. and Singh S. (2012), ”Convolution Properties of Convex Harmonic Functions”, **Int. J. Open Prob. Compl. Anal.**, 4 (3), pp. 69-77.

[52] Kuroki K. and Owa S. (2011), ”Notes on new class for certain analytic functions”, **RIMS Kokyuroku**, 1772, pp. 21-25,.

[53] Lewandowski Z., Miller S. S. and Zlotkiewicz E. J. (1976), ”Generating functions for some classes of univalent functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, vol. 56, pp. 111-117.

[54] Lewin M. (1967), ”On a coefficient problem for bi-univalent functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 18, pp. 63-68.

[55] Libera R. J. (1965), ”Some classes of regular univalent functions”, **Proceedings of the American Mathematical Society**.

[56] Lowner K. (1923), ”Untersuchungen tiber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises”, **Math. Ann.**, 89, pp. 102-121.

[57] Ma W. and Minda D. (1992), ”Uniformly convex functions”, **Ann. Polon. Math.**, 57, 165-175.

[58] MacGregor T. H. (1962), ”Functions whose derivative has a positive real part”, **Trans. Am. Math. Soc.**, 104, pp. 532-537.

[59] Markes E. P., Robertson M. S. and Scott W. T. (1962), ”On Products of Starlike Functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 13, pp. 960-964.

[60] Marx A. (1932), ”Untersuchungen uber schlichte Abbildungen”, **Math. Ann.**, 107 (1), pp. 40-67.

[61] Merkes E. and Salmassi M. (1992), ”Subclasses of uniformly starlike functions”, **Internat. J. Math. & Math. Sci.**, 15 (3), pp. 449-454.

[62] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1993), ”Averaging operators and a generalized Robinson differential inequality”, **J. Math. Anal. Appl.**, 173, pp. 459-469.

[63] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1996), ”A Class of Nonlinear Averaging Integral Operators”, **J. Math. Anal. Appl.**, 197, pp. 313-323.

[64] Mocanu P. T. (1980), ”Starlikeness and convexity for nonanalytic functions in the unit disc”, **Mathematica (Cluj).**, 22 (45), pp. 77-83.

[65] Motamednezhad A., Nosrati S. and Zaker S. (2019), ”Bounds for initial MacLaurin coefficients of a subclass of bi-univalent functions associated with subordination”, **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.**, 68 (1), pp. 125-135.

[66] Murugusundaramoorthy G. (2003), ”A class of Ruscheweyh-type harmonic univalent functions with varying arguments”, **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 90-95 (electronic).

[67] Netanyahu E. (1969), ”The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < ۱$”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 32 (2), pp. 100-112.

[68] Nezhmetdinov I. R. (1997), ”Classes of Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions as Dual Sets”, **J. Math. Anal. Appl.**, 216, pp. 40-47.

[69] Nosrati S. and Zireh A. (2018), ”On Starlike Harmonic Functions”, **TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics**, to appear.

[70] Nosrati S. and Zireh A. (2020), ”On Fully-Convex Harmonic Functions and their Extension”, **Bol. Soc. Paran. Mat.**, (3s.) 38 (2), pp. 51-60.

[71] Nunokawa M. and Sokol J. (2013), ”Strongly gamma-starlike functions of order alpha”, **Ann. Uni. Mariae Curie-Sklodowska Lublin-Polonia**, vol LXVII (2), pp. 43-51.

[72] Ozawa M. (1969), ”An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient”, **Kodai Math. Sere. Rep.**, 21, pp. 129-132.

[73] Pederson R. N. (1968), ”A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 31, pp. 331-351.

[74] Pederson R. N. and Schiffer M. (1972), ”A proof of the Bieberbach conjecture of the fifth coefficient”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 45, pp. 161-193.

[75] Pólya G. and Schoenberg I. J. (1958), ”Remarks on de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle”, **Pacific J. Math.**, 8 (2), pp. 295-334.

[76] Pommerenke C. (1963), ”On starlike and close-to-convex functions”, **Proc. London Math. Soc.**, 3-13 (1), pp. 290-304.

[77] Pommerenke C. (1975), ”**Univalent Functions**”, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

[78] Ponnusamy S. and Sairam Kaliraj A. (2014), ”Univalent harmonic mappings convex in one direction”, **Anal. & Math. Phys.**, 4 (3).

[79] Ponnusamy S., Prajapat J. K. and Sairam Kaliraj A. (2015), ”Uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings”, **J. Anal.**, 23, pp. 121-129.

[80] Ponnusamy S. and Rønning F. (1997), ”Duality for Hadamard products applied to certain integral transforms”, **Complex Variables: Theory and Appl.**, 32 (3), 263-287.

[81] Ponnusamy S. and Rønning F. (1998), ”Starlikeness properties for convolutions involving hypergeometric series”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska**, L II.1, 16, 141-155.

[82] Ponnusamy S., Sairam Kaliraj A. and Starkov V. V. (2016), ”Absolutely convex, uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings”, **Complex Variables and Elliptic Equations**, 61 (10), pp. 1418-1433.

[83] Porwal S. and Darus M. (2013), ”On a new subclass of bi-univalent functions”, **J. Egyptian Math. Soc.**, 21, pp. 190-193.

[84] Ravichandran V., Polatoglu Y., Bolcal M. and Sen A. (2005), ”Certain subclasses of starlike and convex functions of complex order”, **Hacet. J. Math. Stat.**, 34, pp. 9-15.

[85] Robertson M. S. (1936), ”On the theory of univalent functions”, **Ann. Math.**, 37, pp. 374-408.

[86] Rønning F. (1994), ”On uniform starlikeness and related properties of univalent functions”, **Comp. Var. Theory Appl.**, 24 (3-4), pp. 233-239.

[87] Rønning F. (1993), ”A survey on uniformly convex and uniformly starlike functions”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska**, Sect. A, 47 (13), pp. 123-134.

[88] Rønning F. (1993), ”Uniformly Convex Functions and a Corresponding Class of Starlike Functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 118 (1), pp. 189-196.

[89] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2001), ”Goodman-Rønning-type harmonic univalent functions”, **Kyungpook Math. J.**, 41 (1), 45-54.

[90] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2002), ”Goodman-type harmonic convex functions”, **J. Natur. Geom.**, 21 (1-2), 39-50.

[91] Ruscheweyh St. and Salinas L. (1989), ”On the preservation of direction-convexity and the Goodman-Saff conjecture”, **Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math.**, 14, pp. 63-73.

[92] Ruscheweyh St. and Sheil-Small T. (1973), ”Hadamard products of Schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture”, **Comment. Math. Helv.**, 48 (1), pp. 119-135.

[93] Sakaguchi K. (1959), ”On a certain univalent mapping”, **J. Math. Soc. Japan**, 11 (1), 72-75.

[94] Shanmugam T. N. and Lourthu M. J. (2013), ”Universally Prestarlike Functions of Complex Order”, **Int. Journal of Math. Analysis**, 7 (24), pp. 1155-1164.

[95] Sheil-Small T. (1990), ”Constants for Planar Harmonic Mappings”, **J. London Math. Soc.**, 2 (42), pp. 237-248.

[96] Silverman H. (1998), ”Harmonic Univalent Functions with Negative Coefficients”, **J. Math. Ana. Appl.**, 220 (1), 283-289.

[97] Silverman H. (1975), ”Univalent functions with Negative Coefficients”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 51, pp. 109-116.

[98] Sim Y. J. and Kwon O. S. (2013), ”On Certain Classes of Convex Functions”, **Int. J. Math. & Math. Sci.**, Article ID 294378.

[99] Sobczak-Kneć M., Starkov V. V. and Szynal J. (2011), ”Old and new order of linear invariant family of harmonic mappings and the bound for Jacobian”, **Ann. Univ. Mariae Curie - Skodowska**, **LXV** (2), 191-20.

[100] Spacek L. (1933), ”Prispěvek k teorii funkei prostych”, **Čapopis Pest. Mat. Fys.**, 62, pp. 12-19.

[101] Srivastava H. M. and Bansal D. (2015), ”Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions”, **J. Egyptian Math. Soc.**, 23, pp. 242-246.

[102] Srivastava H. M., Bulut S., Ça□lar M. and Ya□mur N. (2013), ”Coefficient estimates for a general subclass of analytic and bi-univalent functions”, **Filomat**, 27 (5), pp. 831-842.

[103] Srivastava H. M., Eker S. Sumer and Ali M. Rosihan (2015), ”Coefficient bounds for a certain class of analytic and bi-univalent functions”, **Filomat 29:8**, pp. 1839-1845.

[104] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2015), ”Coefficient estimates for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **Acta Univ. Apulensis Math. Inform.**, 23, pp. 153-164.

[105] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), ”Initial coefficient estimates for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.**, 36, pp. 863-871.

[106] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), ”Coefficient estimates for some general subclasses of analytic and bi-univalent functions”, **Afr. Mat.**, 28, pp. 693-706.

[107] Srivastava H. M., Joshi B. S., Joshi S. and Pawar H. (2016), ”Coefficient estimates for certain subclasses of meromorphically bi-univalent functions”, **Palest. J. Math.**, 5, Special Issue, pp. 250-258.

[108] Srivastava H. M., Mishra A. K. and Gochhayat P. (2010), ”Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions”, **Appl. Math. Lett**, 23 (10), pp. 1188-1192.

[109] Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Sivakumar R. (2014), ”Initial coefficient bounds for a subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **Tbilisi Math. J.**, 7, pp. 1-10.

[110] Stankiewicz J. (1966), ”Quelques problémes extrémaux dans les classes des fonctions α-angulairement étoilées”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska**, Sect. A, 20, pp. 59-75.

[111] Starkov V. V. (2004), ”Application of the linear invariance idea in the theory of harmonic mappings”, New order (in Russian), **Modern Problems of Function Theory and its Applications**, Saratov State University, Saratov, 173.

[112] Sugawa Toshiyuki and Wang li-Mei (2016), ”Notes on Convex Functions of Order alpha”, **Comput. Methods Funct. Theory**, 16 (1), pp. 79-92.

[113] Tang Huo, Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Gurusamy P. (2016), ”The Fekete-Szegö functional problems for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **J. Math. Inequal.**, 10, pp. 1063-1092.

[114] Temme N. M. (1996), ”Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics”, New York: Wiley.

[115] Umezawa T. (1955), ”On the theory of univalent functions”, **Tohoku Math. J.**, 7 (2)(3), pp. 212-228 .

[116] Wilken D. R. and Feng J. (1980), ”A Remark on Convex and Starlike Functions”, **J. London Math. Soc.**, 2 (21), pp. 287-290.

[117] Xu Q.- H., Gui Y.- C. and Srivastava H. M. (2012), ”Coefficient estimates for a Certain subclass of analytic and bi-univalent functions”, **Appl. Math. Lett.**, 25, pp. 990-994.

[118] Xu Q.- H., Xiao H. -G. and Srivastava H. M. (2012), ”A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems”, **Appl. Math. Comput.**, 218 (23), pp. 11461-11465.

[119] Yalçin S., Öztürk M. and Yamankaradeniz M. (2007), ”On the subclass of Salagean-type harmonic univalent functions”, **JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 8 (2). Article 54.

[120] Zireh A. and Analouei Audegani E. (2016), ”Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions”, **Bull. Iranian Math. Soc.**, 42, pp. 881-889.

نمایه