

فصل ۳

توابع ستاره‌گون یکنواخت و محدب یکنواخت

هدف اصلی رساله در این بخش ظاهر می‌شود و در اینجا ما رده‌های توابع ستاره‌گون یکنواخت و محدب یکنواخت را تعریف و مشخصه‌سازی می‌کنیم. هر دو رده با استفاده از یکپارچه‌سازی روی رده‌های توابع تحلیلی **ستاره‌گون یکنواخت** (به ترتیب **محدب یکنواخت**) و توابع همساز **کاملاً ستاره‌گون** (به ترتیب **کاملاً محدب**) اعمال شده و در برگیرنده‌ی خواص خانواده‌های پیشین است. مطالعه‌ی نخستین رده‌ها از توابع تحلیلی توسط گودمن انجام شده و رده‌های توابع همساز که توسط کلونی و شیل-اسمال صورت گرفته ما را به این تعمیم راهنمایی کرد. برخلاف رده‌های **ستاره‌گون یکنواخت** و **کاملاً ستاره‌گون**، روی خانواده‌های محدب مطالعات بیشتری انجام شده و این به رساندن ما به مقصودمان کمک شایانی می‌کند. در این زمینه اخیراً مطالعات بیشتری صورت گرفته و ما در این فصل آنها را ذکر خواهیم نمود. بعلاوه هم در توابع تحلیلی و هم در توابع همساز، وجود ویژگی پیچش نه تنها از خواص عملکردی دو تابع است بلکه ابزاری قوی در تعمیم مسئله به حالات کلی‌تر، و استنتاج نتایجی است که در وضعیت قبلی قابل حصول نبوده‌اند. برای نیل به این مهم، جهت بهره‌گیری از ابزار پیچش تعاریف و قضایای مورد نیاز را در ادامه بیان خواهیم نمود.

برای تابع همساز $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in S_H$ عملگر $D_\zeta f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ با تعریف

$$\begin{aligned} D_\zeta f(z) &= (z - \zeta)f_z(z) - \overline{(z - \zeta)f_{\bar{z}}(z)} \\ &= (z - \zeta)h'(z) - \overline{(z - \zeta)g'(z)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

عملگری همساز است. برای $\zeta = 0$ عملگر $Df(z) = zh'(z) - \overline{zg'(z)} = Df(z)$ همان عملگر پیشین (۱۰.۲) بوده و مشتقگیری از عملگر $D_\zeta f(z)$ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} D_\zeta^2 f(z) &= D_\zeta(D_\zeta f(z)) \\ &= D_\zeta((z - \zeta)h'(z) - \overline{(z - \zeta)g'(z)}) \\ &= (z - \zeta)^2 h''(z) + \overline{(z - \zeta)^2 g''(z)} + (z - \zeta)h'(z) + \overline{(z - \zeta)g'(z)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

برای $\zeta = 0$ عملگر $D^2 f(z) = z^2 h''(z) + \overline{z^2 g''(z)} + zh'(z) + \overline{zg'(z)} = D^2 f(z)$ توسط **الامیری**^۱ و **موکانو** تشریح شد [۷]. با بکارگیری این نماد، از عملیات نگارش مختصری کاسته شده و معانی فرمول‌ها واضح‌تر خواهد بود. در اینجا لازم است ذکر شود که همزمان با کار مولفان در بحث تعمیم توابع کاملاً ستاره‌گون، مقاله‌ای نیز در این باب توسط **پوناسمی**^۲، **پاراجاپات**^۳ و **سایرام کالیراج**^۴ ارائه شد که حاوی همین ایده‌هاست [۷۹]. اگرچه تعاریف و نتایج در هر دو مورد مشابه و بحث شکل یکسانی دارد، لیکن اثبات ارائه شده در اینجا با روش **پیچش** می‌باشد که به نوبه خود حاوی نوآوری بوده و تاییدی بر کار آنهاست. در این نوشتار سعی شده تا از نمادهای مشترک بهره‌گرفته و نتایج را در هر دو شکل بیان کنیم.

۱.۳ توابع ستاره‌گون یکنواخت

شبه تعریف ۱.۱۱.۱ برای توابع تحلیلی، می‌توان برای توابع همساز چنین تعریف کرد:

تعریف ۱.۱.۳ [۷۹] تابع همساز موضعا تک ارز $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}$ را نگاشت **ستاره‌گون یکنواخت**^۵ در \mathbb{D} گوئیم اگر f در \mathbb{D} کاملاً ستاره‌گون بوده و هر قوس مدور γ_ζ در \mathbb{D} با مرکز $\zeta \in \mathbb{D}$ را به قوس $f(\gamma_\zeta)$ بنگارد که نسبت به $f(\zeta)$ ستاره‌گون است.

اکنون شرطی لازم را برای آنکه تابع تک ارز $f \in S_H$ که در \mathbb{D} **ستاره‌گون یکنواخت** باشد را بیان می‌کنیم. برای هر قوس مدور

$$\gamma_\zeta := \{z = \zeta + re^{i\theta}, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

^۱Al-Amiri

^۲Ponnusamy

^۳Prajapat

^۴Sairam Kaliraj

^۵Uniformly starlike

که در \mathbb{D} واقع شده و مرکز آن $\zeta \in \mathbb{D}$ است، گیریم Γ_ζ تصویر γ_ζ تحت f باشد. قوس Γ_ζ را نسبت به $f(\zeta)$ ستاره‌گون گوئیم اگر شناسه بردار $f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta)$ تابعی غیرنزولی از θ باشد، یعنی

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg\{f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta)\} \geq 0, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta \quad (3.3)$$

و یا

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg\{f(z) - f(\zeta)\} \geq 0$$

و این درست است اگر و فقط اگر

$$\operatorname{Im} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f(z)}{f(z) - f(\zeta)} \geq 0$$

برای γ_ζ . $z \in \gamma_\zeta$ قرار می‌دهیم $z = \zeta + re^{i\theta}$ بنابراین $\frac{\partial}{\partial \theta} z = i(z - \zeta)$ و یک محاسبه ساده نتیجه می‌دهد

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{(z - \zeta)f_z(z) - \overline{(z - \zeta)}f_{\bar{z}}(z)}{f(z) - f(\zeta)} \right\} \geq 0, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{D}^2 \quad (z \neq \zeta) \quad (4.3)$$

به طور معادل

$$\operatorname{Re} \frac{D_\zeta f(z)}{f(z) - f(\zeta)} \geq 0, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{D}^2 \quad (5.3)$$

رده‌ی تمام توابع $f \in S_H$ (به ترتیب $f \in S_H^\circ$) که در \mathbb{D} ستاره‌گون یکنواخت هستند را با US_H^* (US_H^* به ترتیب $US_H^{\circ*}$) نشان می‌دهیم. واضح است که $US_H^* \subset FS_H^*$.

نتیجه ۱.۱.۳ [۶۹] اگر $f \in UST$ تابعی تحلیلی باشد آنگاه $f \in US_H^*$. لذا $UST \subset US_H^*$ و اگر تابعی در (۱.۱۱.۱) صدق نکند، سپس در US_H^* نیست. **گودمن** [۴۱] نشان داد که تابع تحلیلی $f(z) = \frac{z}{1-Az} \in UST$ اگر و فقط اگر $|A| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، در نتیجه برای نگاشت محدب $\ell(z) = \frac{z}{1-z} \notin US_H^*$.

مثال ۱.۱.۳. بازای $|\beta| < 1$ برای **نگاشتهای آفین** $f(z) = z + \bar{\beta}z \in US_H^*$ ، زیرا

$$\operatorname{Re} \frac{(z - \zeta) - \overline{(z - \zeta)}\beta}{(z - \zeta) + \overline{(z - \zeta)}\beta} \geq 0$$

معادل است با

$$\operatorname{Re} \left((z - \zeta) - \overline{(z - \zeta)}\beta \right) \left(\overline{(z - \zeta)} + (z - \zeta)\beta \right) \geq 0$$

$$\text{یا } (1 - |\beta|^2)|z - \zeta|^2 \geq 0$$

^۶ Affine mappings

نتیجه ۲.۱.۳. [۶۹] بازای $\zeta = 0$ در (۵.۳)، تابع همساز $f \in US_H^*$ در \mathbb{D} تک ارز و طبق لم ۲.۶.۲ کاملاً ستاره‌گون خواهد بود. پس واضح است که هر تابع همسازی که کاملاً ستاره‌گون نباشد در US_H^* واقع نخواهد شد. تابع همساز $f(z) = \operatorname{Re} \frac{z}{(1-z)^2} + i \operatorname{Im} \frac{z}{1-z}$ کاملاً ستاره‌گون نیست [۳۰] پس $f \notin US_H^*$.

بسادگی دیده می‌شود که این رده US_H^* تحت چرخش، $e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$ بازای α حقیقی حفظ می‌شود. خاصیت دیگر حفظ رده تحت انتقال^۷ $f(tz)$ ، $0 < t \leq 1$ است. $US_H^* \subset \mathcal{FS}_H^* \subset S_H^*$. اکنون شرطی کافی را برای آنکه تابع $f \in \mathcal{H}$ در \mathbb{D} تک ارز و ستاره‌گون یکنواخت باشد را ذکر می‌نمائیم. نابرابری‌های (۳.۳) و (۴.۳) تنها وقتی بامعنی اند که f در \mathbb{D} تک ارز باشند. بنابراین نگاشت همساز $f \in S_H$ در \mathbb{D} ستاره‌گون یکنواخت است اگر و فقط اگر (۴.۳) برقرار باشد. از طرف دیگر یافتن شرط کافی برای جهت نگهدار بودن تابع همساز $f \in \mathcal{H}$ که در رده US_H^* قرار گیرد مهم است.

قضیه ۱.۱.۳. [۷۹] گیریم $f \in \mathcal{H}$ چنان باشد که

(الف) $f(0) = 0$ و برای تمام $z \in \mathbb{D}$ ها $J_f(z) > 0$ ،

(ب) $\operatorname{Re} \left\{ \frac{(z-\zeta)f_z(z) - \overline{(z-\zeta)}f_{\bar{z}}(z)}{f(z) - f(\zeta)} \right\} \geq 0$ بازای $(z, \zeta) \in \mathbb{D}^2$ که $(z \neq \zeta)$ و نابرابری اکید وقتی برقرار است که $\zeta = 0$.

آنگاه $f \in US_H^*$.

برهان. با فرض $f \in \mathcal{H}$ در شرط‌های (الف) و (ب) صدق نماید. برای $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ و $\zeta = 0$ ، شرط (ب) شکل زیر را بخود می‌گیرد

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f(z)}{zf_z(z) - \bar{z}f_{\bar{z}}(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D} - \{0\}$$

از ([۶۴]، قضیه ۱) می‌دانیم که f در \mathbb{D} تک ارز بوده و از آنجا $f(z) - f(\zeta) \neq 0$ برای f برای $z \neq \zeta$. بدین ترتیب (ب) را می‌توان چنین بازنویسی کرد:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{(z-\zeta)f_z(z) - \overline{(z-\zeta)}f_{\bar{z}}(z)}{f(z) - f(\zeta)} \right\} \geq 0, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{D}^2 \quad (z \neq \zeta)$$

که شرطی لازم برای $f \in \mathcal{H}$ است که در \mathbb{D} ستاره‌گون یکنواخت باشد. \square

در ذیل شرطی لازم و کافی برای آنکه $f \in US_H^*$ باشد را ارائه می‌دهیم. این شرط تعمیم شکلی از قضیه ای درباره توابع کاملاً ستاره‌گون است که توسط چوکه^۸، دورن^۹ و آسگود^{۱۰} مطرح شده است ([۲۴] ص ۱۳۹).

^۷ Transformation

^۸ Chuaqui

^۹ Duren

^{۱۰} Osgood

قضیه ۲.۱.۳. [۶۹] گیریم $f \in US_H^*$. $f(z) \in S_H$ اگر و فقط اگر

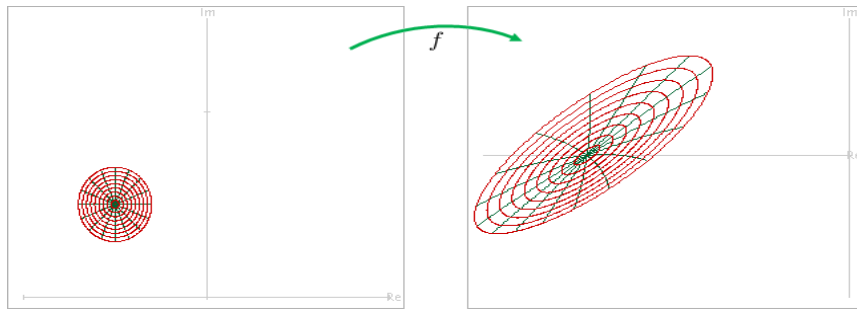
$$|h(z) - h(\zeta)|^2 \operatorname{Re} Q_h \geq \quad (۶.۳)$$

$$|g(z) - g(\zeta)|^2 \operatorname{Re} Q_g + \operatorname{Re} \left\{ (h(z) - h(\zeta))(g(z) - g(\zeta))(Q_g - Q_h) \right\}$$

که $Q_g = \frac{(z - \zeta)g'(z)}{g(z) - g(\zeta)}$ و $Q_h = \frac{(z - \zeta)h'(z)}{h(z) - h(\zeta)}$ در \mathbb{D}^2 .

برهان. مطابق تعریف $f \in US_H^*$ اگر و فقط اگر $\operatorname{Re} \frac{D_\zeta f(z)}{f(z) - f(\zeta)} > 0$ که $(z, \zeta) \in \mathbb{D}^2$ ، و این اگر و فقط اگر $\operatorname{Re} (D_\zeta f(z))(\overline{f(z)} - \overline{f(\zeta)}) > 0$ برای $(z, \zeta) \in \mathbb{D}^2$ ، بدین ترتیب محاسبه ساده ای ما را به (۶.۳) می‌رساند. \square

مثال ۲.۱.۳. اگر $h \in UST$ و $g = \beta h$ با شرط $|\beta| < 1$ باشند، سپس $f = h + \bar{g} \in US_H^*$ زیرا در این حالت h و g در $Q_h = Q_g$ صادق بوده و (۶.۳) برقرار است. به موجب این می‌توان گفت که $f(z) = z + Az^2 + \overline{\beta z + \beta Az^2} \in US_H^*$ که $|\beta| < 1$ و $|A| < \frac{\sqrt{2}}{4}$. در این مثال با فرض $A = \frac{1}{4}$ ، $\beta = -\frac{i}{4}$ بنابراین $f \in US_H^*$ را $f = z + \frac{1}{4}z^2 - \frac{i}{4}\bar{z} - \frac{i}{4}\bar{z}^2 \in US_H^*$ شکل ۱.۳ یک دایره $|z + \frac{1-i}{4}| < \frac{1}{8}$ را نشان می‌دهد که تحت این نگاشت به ناحیه ای بیضوی ستاره‌گون بمرکز $(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ نگاشته می‌شود.



شکل ۱.۳: تصویر $|z + \frac{1-i}{4}| < \frac{1}{8}$ تحت $f = z + \frac{1}{4}z^2 - \frac{i}{4}\bar{z} - \frac{i}{4}\bar{z}^2 \in US_H^*$

نتیجه ۳.۱.۳. [۶۹] بازای $\zeta \in \mathbb{D}$ ثابتی می‌توان مثلاً گرفت $z = 0$ در (۵.۳) پس تابع همساز $f \in US_H^*$ در $\operatorname{Re} \frac{\zeta - \bar{\zeta}b_1}{f(\zeta)} > 0$ صدق می‌کند. بعلاوه اگر $f \in US_H^*$ پس $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > 0$ در \mathbb{D} .

مثال ۳.۱.۳. برای بررسی تابع همساز

$$f(z) = \operatorname{Re} \frac{z}{1-z} + i \operatorname{Im} \frac{z}{(1-z)^2}$$

داریم

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{z - \frac{1}{4}z^2}{(1-z)^2} - \frac{1}{4} \frac{\overline{z}}{(1-\overline{z})^2} \in \mathcal{S}_H^\circ \\
 h'(z) &= \frac{1}{(1-z)^3} \\
 g'(z) &= \frac{-z}{(1-z)^3} \\
 Df(z) &= \frac{z}{(1-z)^3} + \frac{\overline{z^2}}{(1-\overline{z})^3} \\
 \operatorname{Re} \frac{Df(z)}{f(z)} &= \operatorname{Re} \frac{\frac{z}{(1-z)^3} + \frac{\overline{z^2}}{(1-\overline{z})^3}}{\frac{z - \frac{1}{4}z^2}{(1-z)^2} - \frac{1}{4} \frac{\overline{z}}{(1-\overline{z})^2}} > 0 \\
 \operatorname{Re} \frac{D_{\circ/\lambda} f(z)}{f(z) - f(\circ/\lambda)} &= \operatorname{Re} \frac{\frac{(z-\circ/\lambda)}{(1-z)^3} + \frac{\overline{z(z-\circ/\lambda)}}{(1-\overline{z})^3}}{\frac{z - \frac{1}{4}z^2}{(1-z)^2} - \frac{1}{4} \frac{\overline{z}}{(1-\overline{z})^2} - \frac{\circ/\lambda - \frac{1}{4}(\circ/\lambda)^2}{(1-\circ/\lambda)^2} - \frac{1}{4} \frac{\overline{(\circ/\lambda)}}{(1-\overline{\circ/\lambda})^2}} \not> 0
 \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $f \in \mathcal{FS}_H^*$ اما $f \notin \mathcal{US}_H^*$.

مثال ۴.۱.۳. جهت بررسی تابع $f(z) = z + \frac{1}{4}z^4 \in \mathcal{S}_H^*$ چون $Df(z) = z - \overline{z}^4$

$$\operatorname{Re} \frac{Df(z)}{f(z)} = \operatorname{Re} \frac{z - \overline{z}^4}{z + \frac{1}{4}z^4} > 0$$

و

$$\operatorname{Re} \frac{D_\zeta f(z)}{f(z) - f(\zeta)} = \operatorname{Re} \frac{z - \zeta - \overline{z}^4 + \overline{\zeta}^4}{z + \frac{1}{4}z^4 - \zeta - \frac{1}{4}\zeta^4}$$

در $(z, \zeta) = (\circ/\lambda, -\circ/\lambda)$ و در نتیجه $f \in \mathcal{FS}_H^*$ اما $f \notin \mathcal{US}_H^*$. از محاسبات روی این رده حدس می‌زنیم که می‌بایست $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} \geq \frac{1}{4}$.

قضیه ۳.۱.۳. [۷۹] با فرض اینکه $f = h + \overline{g}$ بشکل (۴.۲) بوده و در شرط

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \leq \frac{1}{4} \quad (7.3)$$

صدق کند آنگاه

(الف) $f \in \mathcal{US}_H^*$

$$(ب) \quad (1 - |b_1|)|z| - \left(\frac{1}{4} - |b_1|\right) \frac{|z|^2}{4} \leq |f(z)| \leq (1 + |b_1|)|z| + \left(\frac{1}{4} - |b_1|\right) \frac{|z|^2}{4}$$

کرانه‌های بالا و پائین با نگاشت همساز زیر برای انتخاب مناسبی از $\theta \in \mathbb{R}$ بدست می‌آیند:

$$f_{b_1}(z) = z + e^{i\theta} b_1 \overline{z} + e^{i\theta} \frac{1 - 2b_1}{4} \overline{z}^2$$

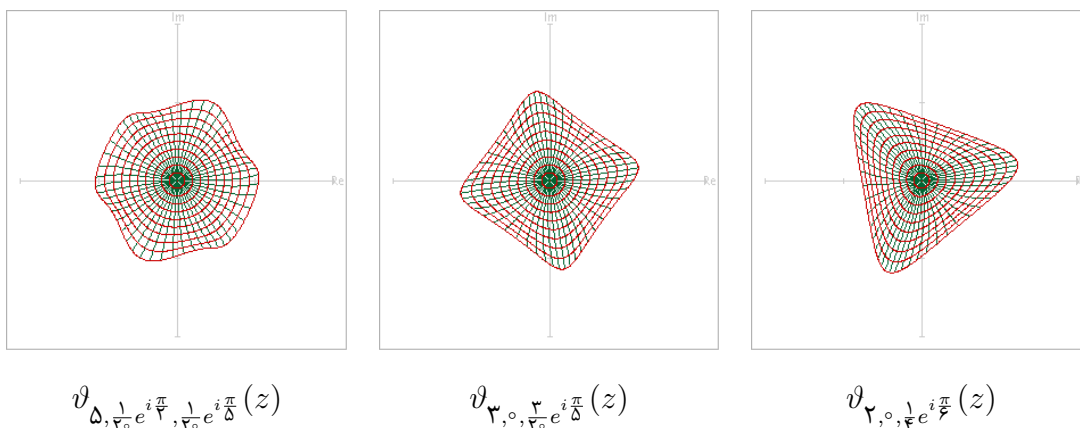
در اینجا $b_1 \in [0, \frac{1}{4}]$.
مثلا توابعی بصورت

$$\vartheta_{n,\alpha,\beta}(z) = z + \alpha z^n + \beta \bar{z}^n, \quad n \geq 2; |\alpha| + |\beta| \leq \frac{1}{2n} \quad (8.3)$$

در شرط (۷.۳) قرار گرفته و در نتیجه در رده US_H^* قرار می‌گیرند. بخصوص برای $\alpha = 0$ و $|\beta| = \frac{1}{4}$ تابع

$$\vartheta_{2,0,\frac{1}{4}} e^{i\varphi}(z) = z + \frac{1}{4} e^{i\varphi} \bar{z}^2$$

عضوی از US_H^* است. همچنین این تابع همساز در \mathbb{D} **محدب مانا**^{۱۱} است [۴۴]. تصویر قرص \mathbb{D} تحت $\vartheta_{n,\alpha,\beta}$ بازای مقادیر معینی از n, α و β در (شکل ۲.۳) نمایش داده شده است.



شکل ۲.۳: تصویر \mathbb{D} تحت نگاشت های همساز US_H^* .

در اینجا ما نگاشت همساز را ملاحظه می‌کنیم که بخش هر تحلیلی آن شکلی از تابع فوق هندسی گاوس^{۱۳} است.

قضیه ۴.۱.۳ [۸۲] در نظر بگیرید که یکی از حالات $a, b \in (-1, \infty)$ با $ab > 0$ یا $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ با $b = \bar{a}$ بین a و b حاکم است. همچنین فرض کنید c عددی حقیقی مثبت و $\alpha \in \mathbb{D}$ است، و نیز

$$f_1(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma} z F(a, b; c; z), \quad (9.3)$$

$$f_2(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma} (F(a, b; c; z) - 1), \quad (10.3)$$

$$f_3(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma} \int_0^z F(a, b; c; t) dt \quad (11.3)$$

^{۱۱}Stable harmonic convex

^{۱۲} نگاشت همساز جهت نگهدار $f = h + g$ را در \mathbb{D} همساز محدب مانا نامیم اگر تمامی نگاشتهای $f_\lambda = h + \lambda g$ برای $|\lambda| = 1$ در \mathbb{D} محدب باشند.

^{۱۳}Gaussian hypergeometric function

(الف) اگر $c > \operatorname{Re}(a+b) + 1$ و

$$|\alpha| \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} (ab+c-a-b-1) \leq 1 \quad (12.3)$$

آنگاه $f_1 \in \mathcal{US}_H^*$.

(ب) اگر $c > \operatorname{Re}(a+b) + 1$ و

$$ab|\alpha| \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \leq 1 \quad (13.3)$$

آنگاه $f_2 \in \mathcal{US}_H^*$.

(پ) اگر $c > \operatorname{Re}(a+b)$ و

$$|\alpha| \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \leq 1 \quad (14.3)$$

آنگاه $f_3 \in \mathcal{US}_H^*$.

نتیجه ۴.۱.۳. [۸۲] برای اعداد حقیقی مثبت b و c و نیز $\alpha \in \mathbb{D}$ ،
(الف) اگر

$$c \geq \beta^+ = \frac{2b+3-3|\alpha| + \sqrt{|\alpha|^2 + 2|\alpha|(2b^2-1) + 1}}{2(1-|\alpha|)} \quad (15.3)$$

سپس تابع $f(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma} z F(1, b; c; z)$ در \mathbb{D} ستاره‌گون یکنواخت است.
(ب) اگر

$$c \geq \gamma^+ = \frac{2b+3+b|\alpha| + \sqrt{b^2|\alpha|^2 + 4|\alpha| + 2|\alpha|b + 1}}{2} \quad (16.3)$$

آنگاه تابع $f(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma} F(1, b; c; z) - 1$ در \mathbb{D} ستاره‌گون یکنواخت است.

(پ) اگر $c \geq 1 + \frac{b}{1-|\alpha|}$ آنگاه تابع $f(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma} \int_0^z F(1, b; c; t) dt$ در \mathbb{D} ستاره‌گون یکنواخت خواهد بود.

با استفاده از رابطه قضیه ۴.۱.۳ می‌توان خانواده‌ای از چندجمله‌ای‌های همساز تک‌ارز یافت که در \mathbb{D} ستاره‌گون یکنواخت هستند.

نتیجه ۵.۱.۳. [۸۲] اگر m عدد صحیح مثبت، c عددی حقیقی مثبت و $\alpha \in \mathbb{D}$ باشند و

$$F_1(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \frac{(m-n+1)_n}{(c)_n} z^{n+1}, \quad (17.3)$$

$$F_2(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} \frac{(m-n+1)_n}{(c)_n} z^n, \quad (18.3)$$

$$F_3(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \frac{(m-n+1)_n}{(c)_n} \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (19.3)$$

(الف) اگر $|\alpha| \Gamma(c) \Gamma(c+2m-1) (m^2 + 2m+c-1) \leq (\Gamma(c+m))^2$ سپس $F_1 \in \mathcal{US}_H^*$.

(ب) اگر $m^2 |\alpha| \Gamma(c) \Gamma(c+2m-1) \leq (\Gamma(c+m))^2$ سپس $F_2 \in \mathcal{US}_H^*$.

(پ) اگر $|\alpha| \Gamma(c) \Gamma(c+2m) \leq (\Gamma(c+m))^2$ سپس $F_3 \in \mathcal{US}_H^*$.

۲.۳ روش پیش در رده US_H^*

در این بخش شرطی کافی در رده US_H^* را با استفاده از پیش می یابیم و در ابتدا نیاز به همتای مجموعه دوگان روی خانواده توابع همساز داریم. گیریم A_H رده ی توابع همسطح مختلط $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ در دامنه همبند ساده \mathbb{D} بوده و به شکل (۴.۲) باشد که لزوماً تک ارز و جهت نگهدار روی \mathbb{D} نیست. مجموعه دوگان یک زیرمجموعه از A_H را چنین تعریف می کنیم:

تعریف ۱.۲.۳ [۶۹] برای مجموعه مفروض $\mathcal{V}_H \subset A_H$ ، مجموعه دوگان \mathcal{V}_H^* عبارتست از

$$\mathcal{V}_H^* = \left\{ F = H + \overline{G} \in A_H : \frac{h * H}{z} + \frac{\overline{g * G}}{\bar{z}} \neq 0, \forall f = h + \overline{g} \in \mathcal{V}_H, \forall z \in \mathbb{D} \right\} \quad (20.3)$$

چنین الگویی که برگرفته از مجموعه دوگان روی توابع تحلیلی است، ابزاری توانا در مطالعه رده های همساز نیز محسوب می شود.

قضیه ۱.۲.۳ [۶۹] گیریم

(۲۱.۳)

$$G_H = \left\{ \varphi - \sigma \overline{\varphi} : \varphi(z) = \frac{z}{(1-z)^2(1-wz)} \left(1 - \frac{w+i\alpha}{1+i\alpha} z \right), \sigma = \frac{(1-w)(1+i\alpha)}{(1-w)(1+i\alpha)}, z \in \mathbb{D} \right\}$$

سپس $US_H^* = G_H^*$. علاوه بر این اگر $\frac{1-|b_1|}{\sqrt{M}} < \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| + n|b_n|$ آنگاه $f \in US_H^*$ ، که ثابت $\sqrt{M} = 1/2557 \dots$ همان ثابت ذکر شده در لم ۳.۱۶.۱ است.

تذکر اینکه تابع تحلیلی φ همان g در لم ۳.۱۶.۱ است اما σ با $|\sigma| = 1$ عدد دلخواهی نبوده و وابسته به w و α در φ است.

برهان. فرض کنید $f = h + \overline{g} \in US_H^*$ یعنی

$$\operatorname{Re} \frac{(z-\zeta)h'(z) - \overline{(z-\zeta)g'(z)}}{h(z) + g(z) - h(\zeta) - g(\zeta)} > 0, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{D}^2 \quad (22.3)$$

بازای $\zeta = 0$ و سپس $z = 0$ داریم $\frac{(z-\zeta)h'(z) - \overline{(z-\zeta)g'(z)}}{f(z) - f(\zeta)} = 1$ ، در نتیجه شرط (۲۲.۳) را می توان بشکل

$$(z-\zeta)h'(z) - \overline{(z-\zeta)g'(z)} \neq i\alpha(h(z) + \overline{g(z)} - h(\zeta) - \overline{g(\zeta)}) \quad (23.3)$$

که $\alpha \in \mathbb{R}$ نوشت. اما طبق اصل مقدار ماکزیمم برای توابع همساز کافی است کافیت که شرط را برای $|z| = |\zeta|$ بررسی نمائیم و بدین جهت با فرض $\zeta = wz$ با $|w| = 1$ ، از تعریف مجموعه دوگان برای توابع همساز (۲۰.۳) و سپس محاسبه ساده، نتیجه $\frac{h * \varphi}{z} - \sigma \frac{\overline{g * \varphi}}{\bar{z}} \neq 0$ حاصل می شود که همان مطلوب ماست.

برای مابقی شرط ضرایب با تابع $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ که بشکل (۱۶.۲) است و بسط سری $\varphi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n z^n$ از تابع تحلیلی $\varphi(z)$ می‌توان یافت $|\phi_n| \leq dn$ که برای تمام $n \geq 2$ برقرار بوده و ثابت دقیق $d = \sqrt{M} = 1/2557 \dots$ را که در لم ۳.۱۶.۱ آمده بدست می‌دهد. با استفاده از قسمت قبل

$$\begin{aligned} \left| \frac{h * \varphi}{z} - \sigma \frac{\overline{g * \varphi}}{\overline{z}} \right| &= \left| 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \phi_n z^{n-1} - \sigma \left(b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{b_n \phi_n z^{n-1}} \right) \right| \\ &\geq |1 - \sigma b_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |\phi_n| |z|^{n-1} - |\sigma| \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| |\phi_n| |z|^{n-1} \\ &\geq |1 - \sigma b_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| dn - \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| dn \\ &> 0 \end{aligned}$$

□

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| + n|b_n| < \frac{1 - |b_1|}{\sqrt{M}} \text{ که}$$

۳.۳ محدب یکنواخت

حال نگاهیتهای همساز محدب یکنواخت را بعنوان همتای همساز رده ی UCV که توسط **گودمن [۴۰]** و **رونینگ [۸۸]** معرفی شد را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۳ [۷۰] تابع همساز موضعا تک ارز $f = h + \overline{g} \in \mathcal{H}$ را نگاشت **محدب یکنواخت** در \mathbb{D} گوئیم اگر f در \mathbb{D} کاملاً محدب بوده و هر قوس مدور γ_ζ در \mathbb{D} با مرکز ζ که در \mathbb{D} قرار دارد را به قوس محدب $f(\gamma_\zeta)$ در $f(\mathbb{D})$ بنگارد.

که مشابه تعریف ۱.۱۱.۱ برای توابع تحلیلی است. رده ی تمام توابع $f \in \mathcal{S}_H$ (به ترتیب $f \in \mathcal{S}_H^\circ$) که در \mathbb{D} محدب یکنواخت هستند را با UK_H (به ترتیب UK_H°) نشان می‌دهیم. تک ارزی f از این حقیقت که نگاشتهای کاملاً محدب در \mathbb{D} تک ارزند نتیجه می‌شود [۲۴]. جهت یافتن معادل تحلیلی تعریف فوق، گیریم $\gamma_\zeta = \{\zeta + re^{i\theta} : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ قوس مدوری بمرکز ζ درون \mathbb{D} بوده و Γ_γ تصویر γ_ζ تحت f باشد. قوس Γ_γ را محدب گوئیم اگر شناسه مماس بر Γ_γ تابعی غیرنزولی از θ باشد، یعنی

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta) \right\} \right) \geq 0, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta \quad (24.3)$$

با انتخاب $z = \zeta + re^{i\theta}$ ، که $r > 0$ می‌بینیم که نابرابری (۲۴.۳) برای هر قوس مدور درون \mathbb{D} درست است اگر و فقط اگر در γ_ζ داشته باشیم

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg \frac{\partial}{\partial \theta} \{f(z) - f(\zeta)\} \right) \geq 0$$

از اینجا داریم:

$$\operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\log \frac{\partial}{\partial \theta} \{f(z) - f(\zeta)\} \right) \geq 0$$

اما برای قوس مدور γ_ζ از $z = \zeta + re^{i\theta}$ نتیجه می شود $\frac{\partial}{\partial \theta} z = i(z - \zeta)$ و با محاسبه ای ساده می یابیم:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{f(z) - f(\zeta)\} = i \left\{ (z - \zeta) f_z(z) - \overline{(z - \zeta)} f_{\bar{z}}(z) \right\} = i \mathbf{D}_\zeta f(z)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \log i \mathbf{D}_\zeta f(z) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \log i \left\{ (z - \zeta) h'(z) - \overline{(z - \zeta)} g'(z) \right\} \\ &= \frac{i [h'(z) + (z - \zeta) h''(z)]}{i \mathbf{D}_\zeta f(z)} i(z - \zeta) \\ &\quad - \frac{i [\overline{g'(z) + (z - \zeta) g''(z)}]}{i \mathbf{D}_\zeta f(z)} \overline{i(z - \zeta)} \\ &= i \frac{\mathbf{D}_\zeta^\vee f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)} \end{aligned}$$

بدین ترتیب می بایست داشته باشیم

$$\operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \theta} \log i \mathbf{D}_\zeta f(z) = \operatorname{Re} \frac{\mathbf{D}_\zeta^\vee f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)} \geq 0$$

و البته برای برخی کاربردهای آتی، این شرط معادل است با

$$\operatorname{Re} P(z, \zeta) \geq 0, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{D}^\vee \quad (z \neq \zeta) \quad (25.3)$$

که

$$P(z, \zeta) = \frac{(z - \zeta) h'(z) + (z - \zeta)^2 h''(z) + \overline{(z - \zeta) g'(z)} + \overline{(z - \zeta)^2 g''(z)}}{(z - \zeta) h'(z) - \overline{(z - \zeta)} g'(z)}$$

لذا اگر $f \in \mathcal{H}$ در \mathbb{D} جهت نگهدارنده و در نابرابری (۲۵.۳) صدق کند سپس f می باید در \mathbb{D} تک ارز و **محدب یکنواخت** باشد. یادآور می شویم که $P(\circ, \circ) = 1$ و در مجموع

قضیه ۱.۳.۳ [۷۰] گیریم $f \in \mathcal{H}$ چنان باشد که $f(\circ) = \circ$ و برای تمام $z \in \mathbb{D}$ ها $J_f(z) > 0$.
 اگر $f \in \mathcal{UK}_H$ و فقط اگر

$$\operatorname{Re} \frac{\mathbf{D}_\zeta^\vee f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)} \geq 0, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{D}^\vee \quad (26.3)$$

براحتی می توان بررسی نمود که این رده تحت **چرخش**، $e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$ بازای α حقیقی، حفظ شده و نیز حافظ **انتقال** $\frac{1}{t} f(tz)$ ، $0 < t \leq 1$ است. از طرفی دیگر \mathcal{UK}_H شامل تمام توابع

کاملاً محدب و محدب یکنواخت نیز می‌گردد. همچنین (۲۶.۳) برای تابع تحلیلی $f(z) \in UK_H$ بشکل (۱.۳) و (۲.۳) با $g = 0$ در شرط زیر قرار می‌گیرد:

$$\operatorname{Re} \frac{D_{\zeta}^2 f(z)}{D_{\zeta} f(z)} = \operatorname{Re} \frac{(z - \zeta)^2 h''(z) + (z - \zeta) h'(z)}{(z - \zeta) h'(z)} = \operatorname{Re} \left(1 + (z - \zeta) \frac{h''(z)}{h'(z)} \right) \geq 0$$

که $(z, \zeta) \in \mathbb{D}^2$. بنابراین

نتیجه ۱.۳.۳. [۷۰] اگر $f \in UCV$ تابعی تحلیلی باشد سپس $f \in UK_H$. لذا $UCV \subset UK_H$.
گودمن [۴۰] نشان داد که تابع تحلیلی $f(z) = \frac{z}{1 - Az} \in UCV$ اگر و فقط اگر $|A| \leq \frac{1}{3}$ در نتیجه تابع محدب UK_H $l(z) = \frac{z}{1 - z} \notin UK_H$.

مثال ۱.۳.۳. بازای $|\beta| < 1$ **نگاشتهای آفین** $f(z) = z + \bar{\beta}z \in UK_H$ ، زیرا

$$\operatorname{Re} \frac{(z - \zeta) + \overline{(z - \zeta)\beta}}{(z - \zeta) - \overline{(z - \zeta)\beta}} \geq 0$$

معادل است با

$$\operatorname{Re} \left((z - \zeta) + \overline{(z - \zeta)\beta} \right) \left(\overline{(z - \zeta) - (z - \zeta)\beta} \right) \geq 0$$

یعنی $0 \leq (1 - |\beta|^2)|z - \zeta|^2$.

نتیجه ۲.۳.۳. [۷۰] اگر در (۲۶.۳) قرار دهیم $\zeta = 0$ ، تابع همساز $f \in UK_H$ در \mathbb{D} تک ارز و **کاملاً محدب** است، پس روشن است که هر تابع همساز که **کاملاً محدب** نباشد در UK_H هم نخواهد بود. تابع همساز $f(z) = \operatorname{Re} \frac{z}{1 - z} + i \operatorname{Im} \frac{z}{(1 - z)^2}$ **کاملاً محدب** نیست ([۳۰]، ص ۴۶) یعنی $f \notin UK_H$.

قضیه ۲.۳.۳. [۷۹] گیریم h و g دارای شکل (۴.۲) باشند به شرطی که $|b_1| < 1$ و $f = h + \bar{g}$ ضرایب در شرط زیر صدق نمایند

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(2n - 1)(|a_n| + |b_n|) \leq 1 - |b_1| \quad (27.3)$$

سپس $f \in UK_H$. کران موجود در (۲۷.۳) برای تابع $f(z) = z - \frac{1}{\alpha} e^{i\alpha} z^2$ با $\alpha \in \mathbb{R}$ دقیق است.

قضیه ۳.۳.۳. [۷۹] فرض کنید $f \in UK_H$ و Λ مجموعه اندیس گذار باشد. گیریم

$$A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{D}(\zeta_{\lambda}, R_{\lambda}) \cap \mathbb{D}(0, r_{\lambda})) \neq \emptyset$$

که $\zeta_{\lambda} \in \mathbb{D}$ ، $0 < R_{\lambda} < 2$ ، $0 < r_{\lambda} \leq 1$. آنگاه $f(A)$ مجموعه ای محدب است.

در [۸۲] مولفان رده ی **محدب یکنواخت** را روی نگاشتهای همساز بیشتر بررسی نموده و خواص بیشتری را آشکار نمودند که جزئیات را ذکر خواهیم نمود. قبل از آن، شرطی لازم و کافی برای آنکه $f \in UK_H$ باشد را ارائه می‌دهیم. این شرط تعمیم شکلی از قضیه ۱.۷.۲ درباره توابع **کاملاً محدب** است که توسط **چوکه**، **دورن** و **آسگود** مطرح شده است ([۲۴] ص ۱۳۹).

قضیه ۴.۳.۳. [۷۰] گیریم $f \in UK_H$ ، $f(z) \in S_H$ و فقط اگر

$$|(z - \zeta)h'(z)|^2 \operatorname{Re} Q_h \geq \quad (28.3)$$

$$|(z - \zeta)g'(z)|^2 \operatorname{Re} Q_g + \operatorname{Re} \left\{ (z - \zeta)^3 (h''(z)g'(z) - h'(z)g''(z)) \right\}$$

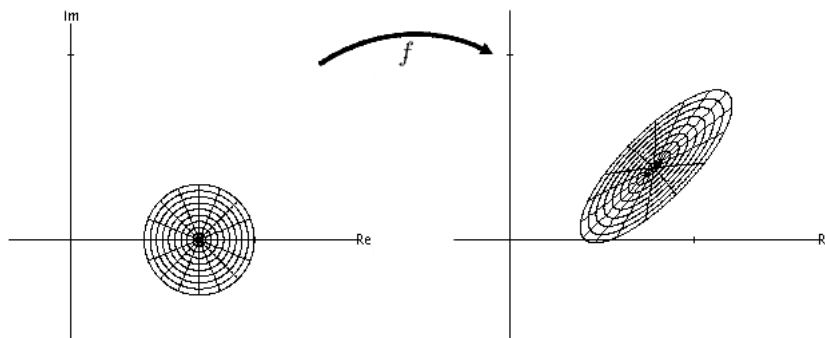
که $Q_g = 1 + (z - \zeta) \frac{g''(z)}{g'(z)}$ و $Q_h = 1 + (z - \zeta) \frac{h''(z)}{h'(z)}$ در \mathbb{D}^2 .

برهان. مطابق تعریف $f \in UK_H$ اگر و فقط اگر $\operatorname{Re} \frac{D_\zeta^2 f(z)}{D_\zeta f(z)} > 0$ که $(z, \zeta) \in \mathbb{D}^2$ ، و این اگر و فقط اگر $\operatorname{Re} \left\{ D_\zeta^2 f(z) \overline{D_\zeta f(z)} \right\} > 0$ برای $(z, \zeta) \in \mathbb{D}^2$ ، بدین ترتیب محاسبه ساده ای ما را به \square می رساند. (۲۸.۳)

لم ۱.۳.۳. [۷۰] $f = h + \overline{\beta h} \in UK_H$ اگر و فقط اگر $h \in UCV$ که در آن $|\beta| < 1$.

برهان. گیریم $f = h + \overline{g} \in S_H$ و $g = \beta h$ با شرط $|\beta| < 1$ باشد پس $f \in UK_H$ اگر و فقط اگر (۲۸.۳) برقرار باشد. چون در این حالت g و h در تساوی $Q_h = Q_g$ صادقند پس (۲۸.۳) برقرار است اگر و فقط اگر $\operatorname{Re} Q_h (1 - |\beta|^2) \geq 0$ یا به طور معادل $|(z - \zeta)h'(z)|^2 \operatorname{Re} Q_h \geq 0$ که نشان می دهد $h \in UCV$. \square

مثال ۲.۳.۳. تابع تحلیلی $h = z + Az^2$ در UCV است اگر و فقط اگر $|A| \leq \frac{1}{6}$. [۴۰]. از لم ۱.۳.۳ می دانیم $f(z) = z + Az^2 + \overline{\beta z + \beta Az^2} \in UK_H$ برای $|\beta| < 1$ و $|A| \leq \frac{1}{6}$. مثلاً بگیرد $A = \frac{1}{6}$ ، $\beta = -\frac{i}{4}$ سپس $f = z + \frac{1}{6}z^2 - \frac{i}{4}\overline{z} - \frac{i}{12}\overline{z^2} \in UK_H$. در شکل ۳.۳ دایره $|z - 0.7| < 0.3$ تحت این نگاشت همساز **محدب یکنواخت** به ناحیه ای بیضی شکل محدب بمرکز $f(\zeta) = (0.78, 0.39)$ نگاشته می شود.



شکل ۳.۳: تصویر $|z - 0.7| < 0.3$ تحت نگاشت $f(z) = z + \frac{1}{6}z^2 - \frac{i}{4}\overline{z} - \frac{i}{12}\overline{z^2} \in UK_H$

قضیه ۵.۳.۳. [۸۲] در نظر بگیرید که یکی از حالات $a, b \in (-1, \infty)$ با $ab > 0$ و یا $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ، $b = \overline{a}$ بین a و b حاکم است. همچنین فرض کنید c عددی حقیقی مثبت و $\alpha \in \mathbb{D}$ است،
 آنگاه

(الف) اگر $c > \operatorname{Re}(a+b) + 2$ و

$$|\alpha| \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \left(\frac{\Psi(a)\Psi(b)\Psi}{(c-a-b-2)\Psi} + \frac{\Delta ab}{c-a-b-1} + 1 \right) \leq 2 \quad (29.3)$$

آنگاه $f_1 \in UK_H$.

(ب) اگر $c > \operatorname{Re}(a+b) + 2$ و

$$ab|\alpha| \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \left(\frac{a+b+c+2ab}{c-a-b-2} \right) \leq 2 \quad (30.3)$$

آنگاه $f_2 \in UK_H$.

(پ) اگر $c > \operatorname{Re}(a+b) + 1$ و

$$|\alpha| \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \left(\frac{2ab+c-a-b-1}{c-a-b-1} \right) \leq 2 \quad (31.3)$$

آنگاه $f_3 \in UK_H$.

در اینجا f_1, f_2 و f_3 همان توابع تعریف شده در قضیه ۴.۱.۳ هستند.

قضیه الکساندر برای توابع تحلیلی (۱.۴.۱) را نمی‌توان بطریقی مشابه بین رده‌های

$$UCV := UK_H \cap \{f = h + \bar{g} : g \equiv 0\} \text{ و } UST := US_H^* \cap \{f = h + \bar{g} : g \equiv 0\} \quad (32.3)$$

بیان کرد [۴۰، ۸۸]، اما می‌توان پلی ارتباطی میان UK_H و US_H^* ایجاد نمود. عملگر

$$f = h + \bar{g} \mapsto \Lambda_f = \Lambda_h + \overline{\Lambda_g} \quad (33.3)$$

را در نظر بگیرید که یک تابع $f \in US_H^*$ را به $\Lambda_f \in UK_H$ می‌نشانند. تاکید ویژه ما بر $\Lambda_h = H_{a,b}(h)$ بازای $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b, a > -1$ و $b > -1$ استوار است که در آن

$$H_{a,b}(h)(z) = \frac{(a+1)(b+1)}{(b-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t^{b-a}) h(tz) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(b+1)}{(a+n)(b+n)} a_n z^n \quad (34.3)$$

بوده و $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ است.

این تبدیلات انتگرالی ما را با پیش f با رده‌ی معینی از توابع خاص رهنمون می‌سازد [۸۰]. بخصوص با در نظر گرفتن حالت حدی $b \rightarrow \infty$ عملگر نوع برناردی^{۱۴} حاصل می‌شود.

با در نظر گرفتن دو حالت حدی $H_{a,b}(h)$ را با تعاریف

$$H_{a,\infty}(h)(z) = \lim_{b \rightarrow \infty} H_{a,b}(h)(z) = \frac{a+1}{z^a} \int_0^z t^{a-1} h(t) dt \quad (35.3)$$

و

$$H_{a,a}(h)(z) = \lim_{b \rightarrow a} H_{a,b}(h)(z) = -(a+1)^2 \int_0^1 t^{a-1} h(tz) \log t dt \quad (36.3)$$

بحث را پی می‌گیریم [۸۰]. دقت شود که

$$H_{a,\infty}(h)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a+1}{a+n} a_n z^n \text{ و } H_{a,a}(h)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)^2}{(a+n)^2} a_n z^n \quad (37.3)$$

^{۱۴}Bernardi type operator

قضیه ۶.۳.۳. [۸۲] فرض کنید $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}$ بفرم (۴.۲) بوده و در شرط ضریب (۷.۳) صدق نماید. قرار دهید $H = \Lambda_h$ و $G = \Lambda_g$. سپس تابع همساز $F(z) = H(z) + \overline{G(z)} \in UK_H$ است مشروط بر اینکه $a > -1$ ، $b > -1$ بوده و در یکی از شروط زیر صدق کند:

$$(الف) \quad ab \leq 3$$

$$(ب) \quad ab > 3 \text{ و } a^2 b^2 - 4ab - 2(a+b) \leq 1$$

برخلاف تحقق شروط فوق، حالات خاصی نیز بچشم می خورد چنانکه در اثبات قضیه ۶.۳.۳ اگر $ab > 3$ و $a^2 b^2 - 4ab - 2(a+b) > 1$ و $[r_1] - [r_2] = 0$ آنگاه تابع $F(z)$ تعریف شده در قضیه ۶.۳.۳ در رده UK_H واقع می شود که در آن r_1 و r_2 ریشه های حقیقی معادله $\phi(n) = 0$ بوده و $[x]$ بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x است. مثلاً با اخذ $a = 2$ و $b = \frac{59}{4}$ هیچکدام از شروط (الف) و (ب) قضیه ۶.۳.۳ درست نیستند با اینحال

$$\phi(n) = 2n^2 - \frac{69}{5}n + \frac{473}{20} > 0 \text{ برای } n \geq 2 \quad (38.3)$$

در نتیجه تابع متناظر $F(z)$ با $a = 2$ و $b = \frac{59}{4}$ در UK_H خواهد بود [۸۲].

قضیه ۷.۳.۳. [۸۲] در نظر بگیرید $F = H + \bar{G} \in \mathcal{H}$ ، $G'(\circ) = 0$ ، در شرط ضریب (۲۷.۳) صدق کند. برای h_a و g_a با تعاریف

$$h_a(z) = \frac{aH(z) + zH'(z)}{a+1} \text{ و } g_a(z) = \frac{aG(z) + zG'(z)}{a+1} \quad (39.3)$$

که $a \geq 1$ ، تابع همساز $f_a(z) = h_a(z) + \overline{g_a(z)} \in US_H^*$ است.

۴.۳ روش پیچش در رده UK_H

با استفاده از مجموعه دوگان توابع همساز می توانیم شرطی کافی را برای اعضاء رده UK_H بیابیم:

قضیه ۱.۴.۳. [۷۰] فرض کنید

$$G_H = \left\{ \varphi - \sigma \bar{\varphi} : \varphi(z) = \frac{z}{(1-z)^3} \left(1 - \frac{w-i\alpha}{2-w-i\alpha} z \right), \sigma = \frac{(1-w)(2-w-i\alpha)}{(1-w)(2-w-i\alpha)}, z \in \mathbb{D} \right\}$$

آنگاه $UK_H = G_H^*$. علاوه بر این اگر $|b_1| < 1 - |a_n| + n(2n-1)|b_n|$ برای $n=2, \dots, \infty$ سپس $f \in UK_H$.

در اینجا نیز تابع تحلیلی φ همان تابع g در لم ۴.۱۶.۱ بوده ولی σ با $|\sigma| = 1$ عددی دلخواه نیست و وابسته به هر دو پارامتر w و α در φ می باشد.

برهان. گیریم $f = h + \bar{g} \in UK_H$ یعنی

$$\operatorname{Re} \frac{(z - \zeta)^2 h''(z) + \overline{(z - \zeta)^2 g''(z)} + (z - \zeta)h'(z) + \overline{(z - \zeta)g'(z)}}{(z - \zeta)h'(z) - \overline{(z - \zeta)g'(z)}} > 0, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{D} \quad (۴۰.۳)$$

بازای $\zeta = 0$ و سپس $z = 0$ داریم $\frac{D_\zeta^2 f(z)}{D_\zeta f(z)} = 1$ ، که با شرط (۴۰.۳) می‌توان نوشت

$$(z - \zeta)^2 h''(z) + \overline{(z - \zeta)^2 g''(z)} + (z - \zeta)h'(z) + \overline{(z - \zeta)g'(z)} \neq i\alpha \left((z - \zeta)h'(z) - \overline{(z - \zeta)g'(z)} \right)$$

که $\alpha \in \mathbb{R}$. طبق اصل مقدار ماگزیمر برای توابع همساز کافی است که شرط را برای $|z| = |\zeta|$ بررسی نمائیم و بدین جهت با فرض $\zeta = wz$ با $|w| = 1$ ، از تعریف مجموعه دوگان برای توابع همساز (۲۰.۳) و سپس محاسبه‌ای سراسر نتیجه $\frac{h^* \varphi}{z} + \sigma \frac{\overline{g^* \varphi}}{\bar{z}} \neq 0$ حاصل می‌شود که نتیجه نخست را ثابت می‌کند.

برای شرط ضرایب با تابع $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ که بشکل (۴.۲) است و بسط سری $\varphi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n z^n$ برای تابع تحلیلی $\varphi(z)$ می‌توان یافت که بازای تمام $n \geq 2$ بموجب لم ۴.۱۶.۱، همچنین $|\phi_n| \leq n(2n - 1)$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{h^* \varphi}{z} + \sigma \frac{\overline{g^* \varphi}}{\bar{z}} \right| &= \left| 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \phi_n z^{n-1} + \sigma \left(b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{b_n \phi_n \bar{z}^{n-1}} \right) \right| \\ &\geq |1 + \sigma b_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |\phi_n| |z|^{n-1} - |\sigma| \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| |\phi_n| |z|^{n-1} \\ &\geq |1 + \sigma b_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n(2n - 1) |a_n| - \sum_{n=2}^{\infty} n(2n - 1) |b_n| \\ &> 0 \end{aligned}$$

در نتیجه $|1 + \sigma b_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n(2n - 1) |a_n| + n(2n - 1) |b_n| < 1 - |b_1|$. □

۵.۳ مطلقاً محدب

مفهومی که اخیراً معرفی شده، خانواده‌ای از توابع همساز محدب است که توسط پوناسمی، سائرام کالیراج و استارکف^{۱۵} بیان گردیده [۸۲] و تعریف آن چنین است:

تعریف ۱.۵.۳. [۸۲] یک تابع همساز موضعا تک ارز $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}$ را در \mathbb{D} مطلقاً محدب^{۱۶} نامیم اگر $f(\mathbb{D}(a, r))$ برای هر $a \in \mathbb{D}$ و تمام $r \in (0, 1 - |a|)$ ها محدب باشد. این خانواده را با $f \in AK_H$ نشان می‌دهیم.

^{۱۵}Starkov

^{۱۶}Absolutely convex

گیریم $AK_H^\circ = \{f = h + \bar{g} \in AK_H : g'(\circ) = \circ\}$ و

$$\widetilde{AK}_H = \{f \in AK_H : f(\mathbb{D}(a, r)) \text{ برای تمام } a \in \mathbb{D} \text{ و } r \in (\circ, 1 - |a|) \text{ محدب است.}\} \quad (41.3)$$

داریم

$$UK_H \subset \widetilde{AK}_H \subset AK_H \subset FK_H \quad (42.3)$$

می توان نشان می دهد که رده های \widetilde{AK}_H و AK_H خانواده های پایای خطی از نگاشت های همساز تک ارز هستند یعنی هنگامی که $f = h + \bar{g} \in AK_H$ (به ترتیب \widetilde{AK}_H)، تابع

$$F(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+z\bar{z}_0}e^{i\theta}\right) - f(z_0e^{i\theta})}{(1-|z_0|^2)h'(z_0e^{i\theta})e^{i\theta}} \quad (43.3)$$

برای تمام $z_0 \in \mathbb{D}$ و $\theta \in \mathbb{R}$ نیز در رده ی AK_H (به ترتیب AK_H°) قرار خواهد گرفت، بهمانصورت که خودریمختی قرص دایره را به دایره می برد، و این موضوع را می توان از تعریف نیز حاصل نمود. این خانواده از توابع دارای خاصیت پایای آفین^{۱۷} هم هستند. یعنی اگر $f \in AK_H$ (به ترتیب \widetilde{AK}_H) باشد آنگاه برای تمام $c \in \mathbb{D}$ که $b_1 = g'(\circ)$ تابع $\frac{f + cf}{1 + cb_1} \in AK_H$ (به ترتیب \widetilde{AK}_H) بعنوان نتیجه ای از این خواص بیان شده، نتایج جالبی را از رده ی AK_H می توان بدست آورد.

قضیه ۱.۵.۳. [۸۲] گیریم $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}$ تابع همساز جهت نگهداری در \mathbb{D} باشد. عبارات زیر معادلند:

(الف) $f \in AK_H$

(ب) $f \in \widetilde{AK}_H$

(پ)

$$|h'(\zeta)|^2 \left(1 + |b|^2 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\zeta - b)(1 - \bar{\zeta}\bar{b})h''(\zeta)}{h'(\zeta)} - 2\bar{b}\zeta \right\} \right) \geq \quad (44.3)$$

$$|g'(\zeta)|^2 \left(1 + |b|^2 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\zeta - b)(1 - \bar{\zeta}\bar{b})g''(\zeta)}{g'(\zeta)} - 2\bar{b}\zeta \right\} \right) + \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\zeta - b)^3(1 - \bar{\zeta}\bar{b})^3}{|\zeta - b|^2|1 - \bar{\zeta}\bar{b}|^2} \right\}$$

برای تمام ζ ها و b در \mathbb{D} .

در [۱۱۱] مولف تعریف جدیدی برای خانواده های پایای خطی ارائه داده و مرتبه پایای خطی یک خانواده L از نگاشت های همساز f که به شکل (۴.۲) هستند را بصورت

$$\operatorname{ord}L = \sup_{f \in L} \frac{|a_2 - \bar{b}_1 b_2|}{1 - |b_1|^2} \quad (45.3)$$

تعریف کرده و کران های بالا و پائین برای ژاکوبین تابع f و نیز نتایج جالبی دیگری را یافت [۹۹].

^{۱۷}Affine invariance property

لم ۱.۵.۳. ([۳۷]) فرض کنید L خانواده ای **پایای خطی** از نگاشتهای همساز باشد. آنگاه

$$\text{ord}L = \sup_{f \in A^\circ[L]} |a_2|$$
 که

$$A^\circ[L] = \left\{ F = \frac{f + \varepsilon \bar{f}}{1 + \varepsilon b_1} : f \in L, \varepsilon \in \mathbb{D}, F_{\bar{z}}(\circ) = \circ \right\} \quad (۴۶.۳)$$

قضیه ۲.۵.۳. (cf. [۹۹]) بگیریم $f \in L$ با $b_1 = f_{\bar{z}}(\circ)$ است که L در فوق بیان شد. سپس
ژاکوبین J_f نگاشت f با هر $z \in \mathbb{D}$ در کران های

$$(1 - |b_1|^2) \frac{(1 - |z|)^{2\alpha_0 - 2}}{(1 + |z|)^{2\alpha_0 + 2}} \leq J_f(z) \leq (1 - |b_1|^2) \frac{(1 + |z|)^{2\alpha_0 - 2}}{(1 - |z|)^{2\alpha_0 + 2}} \quad (۴۷.۳)$$

صدق می کند که در آنها $\alpha_0 = \overline{\text{ord}L}$.

اکنون خواص **پایای خطی** و **خاصیت پایای آفین** از رده ی AK_H را بکار گرفته و ویژگی های
 رشد، پوشش و نیز قضیه مساحت را مورد بحث قرار می دهیم.

قضیه ۳.۵.۳. [۸۲] فرض کنید f بفرم (۴.۲) بوده و $f \in AK_H^\circ$ باشد. آنگاه ضریب a_2 در شرط
 $|a_2| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1/1547$ صدق می کند. همچنین هر تابع $f \in AK_H^\circ$ در نابرابرای های

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+4}} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{\frac{\sqrt{3+4}}{2\sqrt{3}}} \right] \leq |f(z)| \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+4}} \left[\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^{\frac{\sqrt{3+4}}{2\sqrt{3}}} - 1 \right] \quad (۴۸.۳)$$

بازای $1 > r = |z| > 0$ صادق می باشد. بخصوص اینکه برد هر تابع $f \in AK_H^\circ$ شامل قرص
 $|w| < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+4}} \approx 0.302169$ است.

نابرابری (۴۸.۳) حاصل نتیجه اس از **شیل-سمال** روی خانواده ای از نگاشتهای همساز
 تک ارز با خاصیت **پایای خطی** است [۹۵].

ملاحظه ۱.۵.۳. [۸۲] اگر f بشکل (۴.۲) بوده و $f \in AK_H^\circ$ با $a_2 \geq 0$ باشد سپس $a_2 + \text{Re}b_2 \leq$
 ۱. این نابرابری برای توابع رده $f \in AK_H^\circ$ در تحدید به توابع تحلیلی دقیق است.

قضیه ۴.۵.۳. [۸۲] بگیریم $f \in AK_H$ به شرط $b_1 = f_{\bar{z}}(\circ)$ باشد. سپس **ژاکوبین** J_f نگاشت f
 با هر $z \in \mathbb{D}$ در کران های

$$(1 - |b_1|^2) \frac{(1 - |z|)^{\frac{4}{\sqrt{3}} - 2}}{(1 + |z|)^{\frac{4}{\sqrt{3}} + 2}} \leq J_f(z) \leq (1 - |b_1|^2) \frac{(1 + |z|)^{\frac{4}{\sqrt{3}} - 2}}{(1 - |z|)^{\frac{4}{\sqrt{3}} + 2}} \quad (۴۹.۳)$$

صدق کرده و مقدار $A(f(\mathbb{D}_r))$ ، مساحت $f(\mathbb{D}_r)$ ، دارای کران های زیر است:

$$\frac{\pi(1 - |b_1|^2)}{26} \left\{ 3 - (3r^2 + 8\sqrt{3}r + 3) \frac{(1-r)^{\frac{4}{\sqrt{3}} - 1}}{(1+r)^{\frac{4}{\sqrt{3}} + 1}} \right\} \leq A(f(\mathbb{D}_r)) \quad (۵۰.۳)$$

$$A(f(\mathbb{D}_r)) \leq \frac{\pi(1 - |b_1|^2)}{26} \left\{ 3 - (3r^2 - 8\sqrt{3}r + 3) \frac{(1+r)^{\frac{4}{\sqrt{3}}-1}}{(1-r)^{\frac{4}{\sqrt{3}}+1}} \right\} \quad (51.3)$$

قضیه ۵.۵.۳. [۸۲] فرض نمائید f بفرم (۴.۲) بوده و $f \in \mathcal{UK}_H^\circ$ باشد. آنگاه ضریب a_2 در شرط $|a_2| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57735$ صدق کرده و هر تابع $f \in \mathcal{UK}_H^\circ$ در نابرابری (۴۸.۳) قرار می گیرد.

کران ضریب حاصل شده در قضیه ۵.۵.۳ را می توان بعنوان شرطی لازم جهت بررسی اینکه یک تابع در رده \mathcal{UK}_H° قرار بگیرد، بکار گرفت. برای یک تابع همساز $f \in \mathcal{UK}_H^\circ$ کران های موجود در نابرابری های (۴۸.۳) قابل بهبودی نیستند زیرا رده \mathcal{UK}_H° خانواده ای پایای خطی نیست.

مراجع

- [1] سیلورمن هرب (۱۳۶۹)، **متغیرهای مختلط**، ترجمه محسن نقشینه ارجمند، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه اصفهان.
- [2] Ahuja Om P., Jahangiri J. M. and Silverman H. (2003), "Convolutions for special classes of harmonic univalent functions", **Applied Mathematics Letters**, 16 (6), pp. 905-909.
- [3] Ahuja Om P. (2005), "Planar harmonic univalent and related mappings", **J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 6 (4), Art-122.
- [4] Ali R. M., Khan M. H., Ravichandran V. and Subramanian K. G. (2006), "A class of multivalent functions with negative coefficients defined by convolution", **Bull. Korean Math. Soc.**, 43 (1), 179-188.
- [5] Ali R. M. and Ravichandran V. (2011), "Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions", **Mathematics Newsletter, Ramanujan Mathematical Society**, 21 (1), pp. 16-30.
- [6] Ali R. M., Stephen B. A. and Subramanian K. G. (2010), "Subclasses of harmonic mappings defined by convolution", **Applied Mathematics Letters**, Vol. 23 (10).
- [7] Al-Amiri H. and Mocanu P. T. (1981), "Spirallike nonanalytic functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 82 (1), pp. 61-65.
- [8] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), "On Harmonic Functions Defined by Derivative Operator", **J. Inequal. Appl.**, 10 pp. Art. ID 263413.
- [9] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), "On Goodman-Ronning-Type harmonic univalent functions defined by Ruscheweyh operator", **Int. Math.**, Forum 3, no. 44, pp.2161-2174.
- [10] Azizi S., Ebadian A. and Najafzadeh Sh. (2015), "Coefficient Estimates for a Subclass of Bi-univalent Functions", **Comm. Adv. Comp. Sci. App.**, 1, pp. 41-44.

- [11] Bazilevič I. E. (1955), "On a case of integrability in quadratures in the Loewner-Kufarev equation" (Russian), **Mat. Sb. (N.S.)**, 37 (79)(3), pp. 471-476.
- [12] Bieberbach L. (1916), "Ober die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln", **Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften**, pp. 940-955.
- [13] Brannan D. A. and Clunie J. G. (1980), "**Aspects of Contemporary Complex Analysis**", Academic Press, NY.
- [14] Brannan D. A., Clunie J. G. and Kirwan W. E. (1970), "Coefficient estimates for a class of starlike functions", **Can. J. Math.**, 22, pp. 476-485.
- [15] Brannan D. A. and Kirwan W. E. (1969), "On some classes of bounded univalent functions", **J. London Math. Soc.**, 1 (2), pp. 431-443.
- [16] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), "On some classes of bi-univalent functions", **Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.**, 31 (2), pp. 70-77.
- [17] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), "On some classes of bi-univalent functions", **KFAS Proceedings Series, v. 3, Pergamon Press (Elsevier Science Limited), Oxford**, pp. 53-60.
- [18] Brown J. E. (1989), "Images of disks under convex and starlike functions", **Math. Z.**, 202 (4), pp. 457-462.
- [19] Çağlar M., Deniz E. and Srivastava H. M. (2017), "Second Hankel determinant for certain subclasses of bi-univalent functions", **Turkish J. Math.**, 41, pp. 694-706.
- [20] Çağlar M., Orhan H. and Yagmur N. (2012), "Coefficient Bounds For New Subclasses of Bi-Univalent Functions", **Faculty Sci. Math. Uni. Nis, Serbia**, 27 (7), pp. 1165-1171.
- [21] Chen M. (1975), "On the regular functions satisfying $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \alpha$ ", **Bull. Inst. Math. Acad. Sinica**, 3, pp. 65-70.
- [22] Catas A., Oros G. I. and Oros G. (2008), "Differential subordinations associated with multiplier transformations", **Abstr. Appl. Anal.**, ID 845724:1-11.
- [23] Chichra P. N. (1977), "New subclasses of the class of close-to-convex functions", **Proc. Am. Math. Soc.**, 62, pp. 37-43.
- [24] Chuaqui M., Duren P. and Osgood B. (2004), "Curvature properties of planar harmonic mappings", **Comput. Methods Funct. Theory**, 4 (1), pp. 127-142.

-
- [25] Clunie J. and Sheil-Small T. (1984), "Harmonic Univalent Functions", **Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.**, 9 (2), pp. 3-25.
- [26] de Branges L. (1985), "A proof of the Bieberbach conjecture", **Acta Mathematica**, 154, pp. 137-152.
- [27] Ding S. S., Ling Y. and Bao G. J. (1995), "Some properties of a class of analytic functions", **J. Math. Anal. Appl.**, 195 (1), pp. 71-81.
- [28] Dorff M. (2001), "Convolutions of planar harmonic convex mappings", **Comp. Var. Theory Appl.**, 45 (3), pp. 263-271.
- [29] Dorff M., Nowak M. and Woloszkiewicz M. (2012), "Convolutions of harmonic convex mappings", **Complex Variables and Elliptic Equations**, 57 (5), pp. 489-504.
- [30] Duren P. L. (2004), "**Harmonic Mappings in the Plane**", Cambridge Tracts in Mathematics, 156, Cambridge University Press, Cambridge.
- [31] Duren P. L. (1983), "**Univalent Functions**", Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg and Tokyo.
- [32] Dziok J. and Srivastava H. M. (1999), "Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function", **Appl. Math. Comput.**, 103, pp. 1-13.
- [33] Eenigenburg P. J., Miller S. S., Mocanu P. T. and Reade M. O. (1974), "On a subclass of Bazilevič functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 45, pp. 88-92.
- [34] El-Ashwah R. M. (2014), "Subclasses of bi-univalent functions defined by convolution", **J. Egypt. Math. Soc.**, 22 (3), pp. 348-351.
- [35] Ezhilarasi R. and Sudharsan T. V. (2013), "A Subclass of Harmonic Functions Associated with a Convolution Structure", **Ann. Pure & App. Math.**, 4 (2), pp. 182-191.
- [36] Frasin B. A. and Aouf M. K. (2011), "New subclasses of bi-univalent functions", **Appl. Math. Lett.**, 24, pp. 1569-1573.
- [37] Ganenkova E. and Starkov V. V. (2015), "Regularity theorems for harmonic functions", **J. Appl. Anal.**, 21 (1), 1-12.
- [38] Garabedian P. R. and Schiffer M. (1955), "A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient", **Arch. Rational Mech. Anal.**, 4, pp. 427-455.

- [39] Gilman J. P., Kra I. and Rodr guedriguez R. E. (2007), "Complex Analysis", Springer.
- [40] Goodman A. W. (1991), "On Uniformly Convex Functions", **Ann. Polon. Math.**, 56, pp. 87-92.
- [41] Goodman A. W. (1991), "On Uniformly Starlike Functions", **J. Math. Ana. & App.**, 155, pp. 364-370.
- [42] Goodman A. W (1983)., "Univalent Functions", Polygonal, Washington, NJ.
- [43] Hallenbeck D. J. and Ruscheweyh St. (1975), "Subordination by convex functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 52, pp. 191-195.
- [44] Hernandez R. and Martn M. J. (2013), "Stable geometric properties of analytic and harmonic functions", **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 155 (2), pp. 343-359.
- [45] Horowitz D. (1978), "A Further Refinement for Coefficient Estimates of Univalent Functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 71, 217-221.
- [46] Jahangiri J. M. (1998), "Coefficient bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients", **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska Sect.**, A 52 (2), 57-66.
- [47] Jahangiri J. M. (1999), "Harmonic Functions Starlike in the Unit Disk", **J. Math. Anal. Appl.**, 235 (2), pp. 470-477.
- [48] Jahangiri J. M., Murugusundaramoorthy G. and Vijaya K. (2002), "Salagean-type harmonic univalent functions", **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 77-82 (electronic).
- [49] Kim Y. C. and Ponnusamy S. (1999), "Sufficiency for gaussian hypergeometric functions to be uniformly convex", **Internat. J. Math. Math. Sci.**, 22 (4), 765-773.
- [50] Kulshrestha P. K. (1973), "Generalized Convexity in Conformal Mappings", **J. Math. anal. App.**, 3, pp. 441-449.
- [51] Kumar R., Gupta S. and Singh S. (2012), "Convolution Properties of Convex Harmonic Functions", **Int. J. Open Prob. Compl. Anal.**, 4 (3), pp. 69-77.
- [52] Kuroki K. and Owa S. (2011), "Notes on new class for certain analytic functions", **RIMS Kokyuroku**, 1772, pp. 21-25,.
- [53] Lewandowski Z., Miller S. S. and Zlotkiewicz E. J. (1976), "Generating functions for some classes of univalent functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, vol. 56, pp. 111-117.

- [54] Lewin M. (1967), "On a coefficient problem for bi-univalent functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 18, pp. 63-68.
- [55] Libera R. J. (1965), "Some classes of regular univalent functions", **Proceedings of the American Mathematical Society**.
- [56] Lowner K. (1923), "Untersuchungen tiber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises", **Math. Ann.**, 89, pp. 102-121.
- [57] Ma W. and Minda D. (1992), "Uniformly convex functions", **Ann. Polon. Math.**, 57, 165-175.
- [58] MacGregor T. H. (1962), "Functions whose derivative has a positive real part", **Trans. Am. Math. Soc.**, 104, pp. 532-537.
- [59] Markes E. P., Robertson M. S. and Scott W. T. (1962), "On Products of Starlike Functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 13, pp. 960-964.
- [60] Marx A. (1932), "Untersuchungen uber schlichte Abbildungen", **Math. Ann.**, 107 (1), pp. 40-67.
- [61] Merkes E. and Salmassi M. (1992), "Subclasses of uniformly starlike functions", **Internat. J. Math. & Math. Sci.**, 15 (3), pp. 449-454.
- [62] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1993), "Averaging operators and a generalized Robinson differential inequality", **J. Math. Anal. Appl.**, 173, pp. 459-469.
- [63] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1996), "A Class of Nonlinear Averaging Integral Operators", **J. Math. Anal. Appl.**, 197, pp. 313-323.
- [64] Mocanu P. T. (1980), "Starlikeness and convexity for nonanalytic functions in the unit disc", **Mathematica (Cluj)**, 22 (45), pp. 77-83.
- [65] Motamednezhad A., Nosrati S. and Zaker S. (2019), "Bounds for initial MacLaurin coefficients of a subclass of bi-univalent functions associated with subordination", **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.**, 68 (1), pp. 125-135.
- [66] Murugusundaramoorthy G. (2003), "A class of Ruscheweyh-type harmonic univalent functions with varying arguments", **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 90-95 (electronic).

- [67] Netanyahu E. (1969), "The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$ ", **Arch. Rational Mech. Anal.**, 32 (2), pp. 100-112.
- [68] Nezhmetdinov I. R. (1997), "Classes of Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions as Dual Sets", **J. Math. Anal. Appl.**, 216, pp. 40-47.
- [69] Nosrati S. and Zireh A. (2018), "On Starlike Harmonic Functions", **TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics**, to appear.
- [70] Nosrati S. and Zireh A. (2020), "On Fully-Convex Harmonic Functions and their Extension", **Bol. Soc. Paran. Mat.**, (3s.) 38 (2), pp. 51-60.
- [71] Nunokawa M. and Sokol J. (2013), "Strongly gamma-starlike functions of order alpha", **Ann. Uni. Mariae Curie-Sklodowska Lublin-Polonia**, vol LXVII (2), pp. 43-51.
- [72] Ozawa M. (1969), "An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient", **Kodai Math. Sere. Rep.**, 21, pp. 129-132.
- [73] Pederson R. N. (1968), "A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient", **Arch. Rational Mech. Anal.**, 31, pp. 331-351.
- [74] Pederson R. N. and Schiffer M. (1972), "A proof of the Bieberbach conjecture of the fifth coefficient", **Arch. Rational Mech. Anal.**, 45, pp. 161-193.
- [75] Pólya G. and Schoenberg I. J. (1958), "Remarks on de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle", **Pacific J. Math.**, 8 (2), pp. 295-334.
- [76] Pommerenke C. (1963), "On starlike and close-to-convex functions", **Proc. London Math. Soc.**, 3-13 (1), pp. 290-304.
- [77] Pommerenke C. (1975), "**Univalent Functions**", Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.
- [78] Ponnusamy S. and Sairam Kaliraj A. (2014), "Univalent harmonic mappings convex in one direction", **Anal. & Math. Phys.**, 4 (3).
- [79] Ponnusamy S., Prajapat J. K. and Sairam Kaliraj A. (2015), "Uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings", **J. Anal.**, 23, pp. 121-129.
- [80] Ponnusamy S. and Rønning F. (1997), "Duality for Hadamard products applied to certain integral transforms", **Complex Variables: Theory and Appl.**, 32 (3), 263-287.

- [81] Ponnusamy S. and Rønning F. (1998), "Starlikeness properties for convolutions involving hypergeometric series", **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska**, L II.1, 16, 141-155.
- [82] Ponnusamy S., Sairam Kaliraj A. and Starkov V. V. (2016), "Absolutely convex, uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings", **Complex Variables and Elliptic Equations**, 61 (10), pp. 1418-1433.
- [83] Porwal S. and Darus M. (2013), "On a new subclass of bi-univalent functions", **J. Egyptian Math. Soc.**, 21, pp. 190-193.
- [84] Ravichandran V., Polatoglu Y., Bolcal M. and Sen A. (2005), "Certain subclasses of starlike and convex functions of complex order", **Hacet. J. Math. Stat.**, 34, pp. 9-15.
- [85] Robertson M. S. (1936), "On the theory of univalent functions", **Ann. Math.**, 37, pp. 374-408.
- [86] Rønning F. (1994), "On uniform starlikeness and related properties of univalent functions", **Comp. Var. Theory Appl.**, 24 (3-4), pp. 233-239.
- [87] Rønning F. (1993), "A survey on uniformly convex and uniformly starlike functions", **Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska**, Sect. A, 47 (13), pp. 123-134.
- [88] Rønning F. (1993), "Uniformly Convex Functions and a Corresponding Class of Starlike Functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 118 (1), pp. 189-196.
- [89] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2001), "Goodman-Rønning-type harmonic univalent functions", **Kyungpook Math. J.**, 41 (1), 45-54.
- [90] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2002), "Goodman-type harmonic convex functions", **J. Natur. Geom.**, 21 (1-2), 39-50.
- [91] Ruscheweyh St. and Salinas L. (1989), "On the preservation of direction-convexity and the Goodman-Saff conjecture", **Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math.**, 14, pp. 63-73.
- [92] Ruscheweyh St. and Sheil-Small T. (1973), "Hadamard products of Schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture", **Comment. Math. Helv.**, 48 (1), pp. 119-135.
- [93] Sakaguchi K. (1959), "On a certain univalent mapping", **J. Math. Soc. Japan**, 11 (1), 72-75.
- [94] Shanmugam T. N. and Lourthu M. J. (2013), "Universally Prestarlike Functions of Complex Order", **Int. Journal of Math. Analysis**, 7 (24), pp. 1155-1164.

- [95] Sheil-Small T. (1990), "Constants for Planar Harmonic Mappings", **J. London Math. Soc.**, 2 (42), pp. 237-248.
- [96] Silverman H. (1998), "Harmonic Univalent Functions with Negative Coefficients", **J. Math. Ana. Appl.**, 220 (1), 283-289.
- [97] Silverman H. (1975), "Univalent functions with Negative Coefficients", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 51, pp. 109-116.
- [98] Sim Y. J. and Kwon O. S. (2013), "On Certain Classes of Convex Functions", **Int. J. Math. & Math. Sci.**, Article ID 294378.
- [99] Sobczak-Kneć M., Starkov V. V. and Szynal J. (2011), "Old and new order of linear invariant family of harmonic mappings and the bound for Jacobian", **Ann. Univ. Mariae Curie - Skodowska, LXV** (2), 191-20.
- [100] Spacek L. (1933), "Prispěvek k teorii funkei prostych", **Čapopis Pest. Mat. Fys.**, 62, pp. 12-19.
- [101] Srivastava H. M. and Bansal D. (2015), "Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions", **J. Egyptian Math. Soc.**, 23, pp. 242-246.
- [102] Srivastava H. M., Bulut S., Çağlar M. and Yağmur N. (2013), "Coefficient estimates for a general subclass of analytic and bi-univalent functions", **Filomat**, 27 (5), pp. 831-842.
- [103] Srivastava H. M., Eker S. Sumer and Ali M. Rosihan (2015), "Coefficient bounds for a certain class of analytic and bi-univalent functions", **Filomat 29:8**, pp. 1839-1845.
- [104] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2015), "Coefficient estimates for some subclasses of m -fold symmetric bi-univalent functions", **Acta Univ. Apulensis Math. Inform.**, 23, pp. 153-164.
- [105] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), "Initial coefficient estimates for some subclasses of m -fold symmetric bi-univalent functions", **Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.**, 36, pp. 863-871.
- [106] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), "Coefficient estimates for some general subclasses of analytic and bi-univalent functions", **Afr. Mat.**, 28, pp. 693-706.
- [107] Srivastava H. M., Joshi B. S., Joshi S. and Pawar H. (2016), "Coefficient estimates for certain subclasses of meromorphically bi-univalent functions", **Palest. J. Math.**, 5, Special Issue, pp. 250-258.

- [108] Srivastava H. M., Mishra A. K. and Gochhayat P. (2010), "Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions", **Appl. Math. Lett**, 23 (10), pp. 1188-1192.
- [109] Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Sivakumar R. (2014), "Initial coefficient bounds for a subclass of m -fold symmetric bi-univalent functions", **Tbilisi Math. J.**, 7, pp. 1-10.
- [110] Stankiewicz J. (1966), "Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions α -angulairement étoilées", **Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska**, Sect. A, 20, pp. 59-75.
- [111] Starkov V. V. (2004), "Application of the linear invariance idea in the theory of harmonic mappings", New order (in Russian), **Modern Problems of Function Theory and its Applications**, Saratov State University, Saratov, 173.
- [112] Sugawa Toshiyuki and Wang li-Mei (2016), "Notes on Convex Functions of Order alpha", **Comput. Methods Funct. Theory**, 16 (1), pp. 79-92.
- [113] Tang Huo, Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Gurusamy P. (2016), "The Fekete-Szegő functional problems for some subclasses of m -fold symmetric bi-univalent functions", **J. Math. Inequal.**, 10, pp. 1063-1092.
- [114] Temme N. M. (1996), "Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics", New York: Wiley.
- [115] Umezawa T. (1955), "On the theory of univalent functions", **Tohoku Math. J.**, 7 (2)(3), pp. 212-228 .
- [116] Wilken D. R. and Feng J. (1980), "A Remark on Convex and Starlike Functions", **J. London Math. Soc.**, 2 (21), pp. 287-290.
- [117] Xu Q.- H., Gui Y.- C. and Srivastava H. M. (2012), "Coefficient estimates for a Certain subclass of analytic and bi-univalent functions", **Appl. Math. Lett.**, 25, pp. 990-994.
- [118] Xu Q.- H., Xiao H. -G. and Srivastava H. M. (2012), "A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems", **Appl. Math. Comput.**, 218 (23), pp. 11461-11465.
- [119] Yalçın S., Öztürk M. and Yamankaradeniz M. (2007), "On the subclass of Salagean-type harmonic univalent functions", **JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 8 (2). Article 54.
- [120] Zireh A. and Analouei Audegani E. (2016), "Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions", **Bull. Iranian Math. Soc.**, 42, pp. 881-889.