دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

رشته:

ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

مکمل مشترک دو زیرفضا از یک فضای هیلبرت

نگارنده:

شاهپور نصرتی

استاد راهنما:

دکتر عبدالمحمد امین پور

استاد مشاور:

دکتر عبدالجبار بدیع الزمان

دیماه ۱۳۸۴

چکیده

نام خانوادگی : نصرتی	**نام :** شاهپور
عنوان پایان‌نامه : مکمل مشترک دو زیرفضا از یک فضای هیلبرت	
استاد راهنما: دکتر عبدالمحمد امین پور	**استاد مشاور :** دکتر عبدالجبار بدیع الزمان
درجه تحصیلی : کارشناسی ارشد	**رشتهٔ :** ریاضی محض گرایش آنالیز
محل تحصیل : دانشگاه شهید چمران اهواز	**دانشکده :** علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی : دیماه ۱۳۸۴	**تعداد صفحه:** ۷۰
کلیدواژه ها: مکمل مشترک دو زیرفضا، گرامی، اندازهٔ طیفی، بعد خطی پائین، بعد خطی بالا	

چکیده: *مبحث مکمل یک زیرفضااز یک فضای هیلبرت از آن جهت اهمیت می یابد که می توان مفهوم تعامد و سپس مکمل متعامد و خواص آن را تعریف نمود و بنابراین در شناخت فضای هیلبرت چه از لحاظ ساختار موضعی و چه زیرساختار زیرفضائی، کمک شایانی می‌کند. با توجه به این موضوع، مکمل مشترک دو زیرفضا، از خواص یک فضای هیلبرت بوده و از لحاظ زیرساختار فضا اهمیت می یابد. این مقاله قصد دارد تا برای دو زیرفضا از یک فضای هیلبرت یک مکمل مشترک معرفی نموده و شرایط وجود و یا عدم وجود آن را بیان نماید. بطور دقیق برای دو زیرفضای X و Y از فضای هیلبرت H، زیرفضای Z مکمل مشترک آندو محسوب می شود اگر با آنها اشتراک بدیهی داشته و بعلاوه $X+Z=Y+Z=H$ باشد. لذا بدین ترتیب شرایط «وجودی» Z بررسی شده و با طرفند بسیار زیبائی، با استفاده از عملگر طیفی، شرط وجود مکمل مشترک برای دو زیرفضا بیان می‌گردد. این رساله شامل چهار فصل بوده و هدف نگارنده پاسخی مناسب برای موارد فوق است و توسط میخائیل لاوزن و سرگئی تریل نوشته شده و اصل مقاله را در ذیل می توانید بیابید.*

$M.Lauzon,\ S.Treil,\ Journal\ of\ Functional\ Analysis$ ۲۱۲(۲۰۰۴), pp ۵۰۰−۵۱۲.

قدردانی و تشکر

لازم است در ابتدا از کلیهء افرادی که مرا در نوشتن این پایان نامه کمک نموده اند، خصوصاً اساتید گرامی، آقایان دکتر امین پور و دکتر بدیع الزمان و آقای حبیب امیری و دیگران که در مراحل مختلف انجام این پایان نامه با مساعدت ها و راهنمایی های بی دریغ خود مرا یاری کردند، تشکر کنم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

در این مقاله شرط لازم و کافی برای آنکه زیرفضاهای بسته $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ از یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک مکمل مشترک داشته باشند را بیان می‌کنیم. بدین معنی که زیر فضائی مانند $\mathcal{Z}$ از $\mathcal{H}$ با زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ اشتراک بدیهی داشته باشند و علاوه بر این

$$\mathcal{H} = \mathcal{X} + \mathcal{Z} = \mathcal{Y} + \mathcal{Z}$$

برخلاف حالت متناهی البعد در اینجا شرطی را بیان می‌کنیم که فراتر از معادلات بعدها و همبعدهاست و همچنین مثالهائی از زیرفضاهای غیربدیهی و بدون مکمل مشترک نیز وجود دارد.

برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با بعد متناهی مسئله براحتی قابل حل است، زیرا اگر در نظر بگیریم که $\dim \mathcal{H} < +\infty$ لذا با فرض $\dim \mathcal{H} = n$ گیریم $\mathcal{X}$ زیرفضای $\mathcal{H}$ بوده و $\dim \mathcal{X} = k$، آنگاه مجموعهٔ تمام زیرفضاهای $\mathcal{Z}$ مکمل $\mathcal{X}$ عبارتست از زیرمجموعهٔ چگال باز از تمام زیرفضاهای با بعد $n-k$ (طبق تعریف گراسمانیان [۱]). توجه کنید که مجموعهٔ تمام زیر فضاهای مکمل با $\mathcal{X}$ یک مجموعه از اندازه تمام [۲] در گراسمانیان فوق است که یک بسلایهٔ هموار [۳] فشرده با بعد $(n-k) \times k$ است. بنابراین طبق قضیهٔ رسته‌ای بیر یا نظریهٔ اندازه، استدلال یکی می تواند نتیجه دهد که هر تعداد شمارا از زیرفضاهای با بعد k دارای یک مکمل مشترک است. بعلاوه، مجموعهٔ تمام چنین مکمل های مشترکی، یک مجموعه از رستهٔ دوم و یک مجموعه از اندازه تمام در گراسمانیان زیرفضاهای با بعد $n-k$ می باشد.

در فصل نخست این مقاله، ابتدا تعاریف مقدماتی و تعاریف اولیه ای که در آنالیز تابعی و نظریهٔ عملگرها معمول است را مطرح و سپس در فصل دوم مفهوم و خواص فضای هیلبرت را که قسمت عمدهٔ بحث ما را تشکیل می دهد، از برخی جهات بررسی کرده و عملگرها را روی آنها بیان می کنیم.

فصل سوم که هدف مقاله در آن بیان می شود، را به تعریف و قضایای مکمل مشترک دو زیرفضا اختصاص داده که در نهایت شرطی لازم و کافی برای وجود مکمل مشترک برای آنها را عنوان خواهیم کرد. در فصل آخر نیز شرط گفته شده برای وجود مکمل مشترک در فضای هیلبرت را با شرط «ε-اشتراک» جایگزین و بیان هندسی آن را مشخص خواهیم نمود.

---

[۱] Grassmaniann
[۲] full measure
[۳] Smooth manifold

در اینجا، فضای هیلبرت مورد بحث را تفکیک پذیر فرض نمی‌کنیم، مگر در جائی که بوضوح ذکر می نمائیم، زیرا نتایج قضایای ذکر شده، برای فضاهای هیلبرت تفکیک پذیر و تفکیک ناپذیر برقرار است. سعی شده تا حد ممکن قضایا اثبات شود و در تعدادی از مواردی نیز که اثبات طولانی بوده به کتب معتبر، ارجاع داده شده است. بالاخره اینکه همانگونه که در آنالیز تابعی مرسوم است، اصل انتخاب را فرض شده تلقی می‌کنیم که در موارد زیادی مورد نیاز است.

فصل ۲

تعاریف اولیه

این فصل شامل تعاریف و مفاهیم اولیه و مورد نیاز برای آغاز بحث می باشد. سپس با تعاریف مقدماتی آنالیز تابعی و تعریف فضای حاصلضرب داخلی راه را برای ورود به فضای هیلبرت هموار می کنیم. در سراسر این مقاله $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و $\mathbb{C}$ معرف مجموعهٔ اعداد مختلط و منظور از میدان $\mathbb{K}$، میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ می باشد.

۱.۲ فضای توپولوژیکی

تعریف ۱.۱.۲. گیریم X یک مجموعهٔ دلخواه باشد. خانوادهٔ τ از زیرمجموعه‌های X را یک **توپولوژی** روی X گوئیم، هرگاه:

۱) $\varnothing\ ,\ X \in \tau$

۲) τ تحت اشتراک متناهی بسته است

۳) τ تحت اجتماع دلخواه بسته است

در اینصورت (X,τ) را یک **فضای توپولوژیک** نامند. عناصر τ را **مجموعه‌های باز** گویند. بنابراین $A \subseteq X$ باز است اگر $A \in \tau$. F را **بسته** گوئیم اگر متمم آن یعنی $X - F$ در τ باز باشد. **بستار** مجموعهٔ $A \subset X$ را با $\overline{A}$ یا $Clos(A)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\overline{A} = \bigcap\{F : F \subseteq X, F \supseteq A, \text{بسته است } X \text{ در } F\}$$

۲.۲ فضای متریک و مفاهیم وابسته

تعریف ۱.۲.۲. گیریم X مجموعه‌ای ناتهی باشد، در این صورت هر تابع حقیقی $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را که دارای خواص زیر باشد، یک **متر** روی مجموعهٔ X می‌نامیم،

(آ) $\forall x,y \in X$، $\quad d(x,y) \geq 0$

(ب) $\forall x,y \in X$، $\quad d(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$

(ج) $\forall x,y \in X$، $\quad d(x,y) = d(y,x)$

(د) $\forall x, y, z \in X$، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
مجموعهٔ X با متر d را یک **فضای متریک** نامیده و با (X,d) نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۲.۲. روی $\mathbb{R}^n$ که دارای اعضائی بصورت n تایی های مرتب است، متر را چنین تعریف می کنیم

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
بوضوح دیده می شود که $(\mathbb{R}^n, d)$ یک فضای متریک بوده و به متریک *معمولی* موسوم است.

تعریف ۳.۲.۲. دنباله (x_n) از فضای متریک (X,d) را **همگرا** گوئیم، هرگاه $x \in X$ وجود داشته باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. x را حد دنباله (x_n) نامیده و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ و یا بصورت خلاصه $x_n \to x$.

تعریف ۴.۲.۲. دنباله (x_n) در فضای متریک (X,d) کراندار است، هرگاه عدد حقیقی M و عنصر $x \in X$ موجود باشند بطوری که بازای هر $n \in \mathbb{N}$، $d(x_n, x) \leq M$. بعلاوه دنبالهٔ (x_n) از فضای متریک (X,d) را یک **دنبالهٔ کوشی** می‌نامیم، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی N وجود داشته باشد که برای هر $m, n \geq N$ داشته باشیم $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. فضای متریک (X,d) را **کامل** گوئیم، هرگاه هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا باشد.

مثال ۵.۲.۲. برای عدد حقیقی $p \geq 1$ فضای ℓ^p متشکل از مجموعهٔ تمام دنباله هایی بصورت $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ (با $x_i \in \mathbb{K}$) که $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \leq \infty$ را در نظر می گیریم، متر روی ℓ^p را بصورت $d(x,y) = (\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می کنیم. آنگاه (ℓ^p, d) یک فضای متریک کامل است. برای توضیحات بیشتر ر.ک. [۳] و [۴].

تعریف ۶.۲.۲. زیر مجموعه M از فضای متریک (X,d) را در X **چگال** گوئیم هرگاه $\overline{M} = X$. فضای متریک (X,d) **تفکیک پذیر** است اگر دارای زیر مجموعهٔ چگال شمارا باشد. بنابراین $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است زیرا $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ و از اینکه $\mathbb{Q}$ شمارش پذیر است پس $\mathbb{R}$ تفکیک پذیر می باشد.

۳.۲ فضای برداری

تعریف ۱.۳.۲. یک **فضای برداری** روی میدان $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C})$ متشکل از :
۱. یک مجموعه V از اشیایی به نام بردارها،
۲. قاعده‌ای به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای x و y از V بردار $x+y$ از V را که مجموع x و y نامیده می‌شود، وابسته می‌سازد با این شرط که
آ) جمع جابجائی است، یعنی $x + y = y + x$
ب) جمع شرکت‌پذیر است، یعنی $(x + y) + z = x + (y + z)$

پ) بردار یکتای $\circ$ به نام صفر در V موجود است، بطوری که به‌ازاء هر x در V، $x + \circ = x$

ت) به‌ازاء هر بردار x در V بردار یکتای $-x$ در V موجود است بطوری که $x + (-x) = \circ$

۳. قاعده‌ای به نام ضرب اسکالری که به هر اسکالر α از $\mathbb{K}$ و هر بردار x در V بردار αx در V را که حاصلضرب α در x نامیده می‌شود، وابسته سازد با این شرایط که

(آ) به‌ازاء هر x در V، $1.x = x$

(ب) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(پ) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

(ت) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

زیرمجموعهٔ W از فضای برداری V را زیرفضای V گوئیم هرگاه W تحت اعمال تعریف شده در V، خود یک فضای برداری باشد.

تعریف ۲.۳.۲. گیریم X یک فضای برداری بر میدان $\mathbb{K}$ باشد. زیر مجموعهٔ S از X را **وابسته خطی** نامیم هرگاه بردارهایی متمایز مانند $x_1, x_2, \cdots, x_n$ در S و اسکالرهایی مانند $r_1, r_2, \cdots, r_n$ که همگی صفر نیستند در $\mathbb{K}$ یافت شود بطوری که

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n = \circ$$

مجموعه‌ای که وابسته خطی نباشد را **مستقل خطی** نامند. اگر $x_1, x_2, \cdots, x_n$ بردارهایی در X و $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اسکالرهایی باشند، بردار

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$$

را یک **ترکیب خطی** از $x_1, x_2, \cdots, x_n$ نامند. چنانچه $S \subseteq X$ و Y مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی عناصر S باشد، می‌گوئیم Y **پیمای** S است و می نویسیم $Y = Span(S)$. اگر $S \subseteq X$ و $X = Span(S)$ و عناصر S مستقل خطی باشند ، گوئیم S یک **پایه** برای مجموعهٔ X است. در صورتیکه مجموعهٔ S متناهی و شامل n بردار باشد، گوئیم X یک فضای برداری با بعد متناهی است. تعداد اعضای S را **بعد** X می نامیم و با $\dim X = n$ نشان می دهیم.

ملاحظه ۳.۳.۲. *هر فضای برداری با پایهٔ شمارا، تفکیک پذیر است. بعلاوه هر فضای متریک تفکیک پذیر دارای پایهٔ شماراست. بوضوح $\mathbb{R}^n$ همراه با جمع و ضرب اسکالر معمولی یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است و $\dim \mathbb{R}^n = n$. لذا $\mathbb{R}^n$ تفکیک پذیر است.* می توان دید که فضای ℓ^p با تعریف پایهٔ شمارا بصورت $\{e_1, e_2, ..., e_j, ...\}$ که برای هر j، $e_j = (..., 1, ...)$ در مولفهٔ jام برابر یک است فضائی تفکیک پذیر است ([۴] و [۷]).

۴.۲ نرم و فضاهای نرم دار

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. تابع حقیقی $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ را یک **نرم** نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر α داشته باشیم:

(آ) $\|x\| \geq \circ$

(ب) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$
(ج) $\|\alpha x\| = |\alpha|. \|x\|$
(د) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
اگر فضای برداری X دارای نرم $\|\cdot\|$ باشد، آنگاه گوئیم X یک فضای نرم داراست و آن را با $(X, \|\cdot\|)$ نشان می‌دهیم.

اگر X یک فضای نرم دار باشد و برای هر $x, y \in X$، قرار دهیم $d(x,y) = \|x-y\|$، آنگاه بسادگی دیده می‌شود که d یک متر روی X است و بنابراین هر فضای نرم دار یک فضای متریک است. d را **متر تولید شده بوسیلهٔ نرم** $\|\cdot\|$ می‌نامیم. همچنین نرم $\|\cdot\|$ تابعی پیوسته بر X است. این مطلب بسادگی و با بکاربردن تعریف پیوستگی و اینکه

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x-y\|$$

ثابت می‌شود.

مثال ۲.۴.۲. فضای برداری $\mathbb{R}^n$ با نرم $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ که $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ یک فضای نرمدار است. همچنین روی فضای ℓ^p معرفی شده در مثال ۵.۲.۲، می توان نرم را بصورت

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف کرد، که در آن دنبالهٔ $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ در ℓ^p است.

تعریف ۳.۴.۲. فضای نرم دار $(X, \|\cdot\|)$ را **باناخ** گوئیم، هرگاه با متر تولید شده توسط نرم $\|\cdot\|$ کامل باشد. بنابراین $\mathbb{R}^n$ و ℓ^p همراه با نرم های تعریف شده، فضای باناخ هستند.

تعریف ۴.۴.۲. فرض کنیم A یک زیر مجموعهٔ ناتهی از فضای متریک (X, d) باشد. **قطر مجموعهٔ** A را با $diam\ A$ نشان داده و بدین صورت تعریف می کنیم

$$diam\ A = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

A در X کراندار است اگر و تنها اگر عدد حقیقی M وجود داشته باشد بطوری که $diam\ A \leq M$.

تعریف ۵.۴.۲. منظور از یک پوشش باز برای مجموعهٔ S در فضای متریک X، یعنی گردآیه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ بطوری که $S \subset \bigcup G_\alpha$. زیر مجموعهٔ S از فضای متری X را **فشرده** گوئیم هرگاه هر پوشش باز S دارای زیر پوشش متناهی باشد.

تعریف ۶.۴.۲. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک **مجموعهٔ محدب** در X، زیر مجموعهٔ ناتهی S از X است که برای هر $x, y \in S$ و هر عدد حقیقی $0 \leq t \leq 1$ داشته باشیم

$$tx + (1-t)y \in S$$

بوضوح زیرفضای یک فضای برداری مجموعه‌ای محدب است. زیرمجموعهٔ S از X را **گوه** نامیم اگر S یک مجموعهٔ ناتهی و محدب باشد بقسمی که برای هر $t \geq 0$، $tS \subseteq S$. یک گوه را **مخروط** گوئیم هرگاه $S \cap (-S) = \{0\}$.

۵.۲ اندازه

در این بخش تعاریف مختصری در مورد نظریهٔ اندازه که مورد نیاز است را بیان می کنیم. البته خواننده می تواند بحث مبسوط در این زمینه را در [۷] و [۸] ببیند. یادآوری کنیم که مجموعهٔ

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

را اعداد حقیقی توسعه یافته می باشد و تابع حقیقی توسعه یافته، تابعی است با برد در $\mathbb{R}^*$.

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و $\mathcal{B}_X$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های X باشد. $\mathcal{B}_X$ را یک σ–جبر گوئیم هرگاه

۱) $\varnothing\ ,\ X \in \mathcal{B}_X$

۲) $E \in \mathcal{B}_X \Rightarrow E^c = X - E \in \mathcal{B}_X$

۳) برای $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر $\mathcal{B}_X$ داشته باشیم $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}_X$

زوج $(X, \mathcal{B}_X)$ متشکل از یک مجموعهٔ X و یک σ–جبر $\mathcal{B}_X$ را **فضای اندازه‌پذیر** نامند. عضو E از $\mathcal{B}_X$ را مجموعهٔ *اندازه‌پذیر* گوئیم.

تعریف ۲.۵.۲. منظور از **اندازه** μ روی فضای اندازه پذیر $(X, \mathcal{B}_X)$ یک تابع حقیقی توسعه یافته μ روی اعضاء $\mathcal{B}_X$ است که برای همهٔ اعضاء $\mathcal{B}_X$ تعریف شده و دارای خواص زیر باشد:

۱) $\mu(\varnothing) = 0$

۲) برای هر $E \in \mathcal{B}_X$، $\mu(E) \geq 0$

۳) μ **جمعی شمارا** باشد، یعنی برای هر دنبالهٔ $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضاء دو به دو مجزای $\mathcal{B}_X$ داشته باشیم:

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

فضای اندازه پذیر $(X, \mathcal{B}_X)$ و اندازهٔ تعریف شدهٔ μ روی آن را با $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$، نشان داده و آن را **فضای اندازه** می نامیم. اندازهٔ μ را یک اندازهٔ σ– باپایان گوئیم، هرگاه یک دنبالهٔ $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر $\mathcal{B}_X$ باشد بگونه‌ای که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ و به ازاء هر $n \in \mathbb{N}$، $\mu(E_n) < \infty$ باشد.

لم ۳.۵.۲. *فرض کنید μ اندازهٔ تعریف شده روی σ–جبر $\mathcal{B}_X$ باشد. اگر E و F متعلق به $\mathcal{B}_X$ باشند و $E \subseteq F$ آنگاه $\mu(E) \leq \mu(F)$.*

برهان. ر.ک [۸]. □

تعریف ۴.۵.۲. فرض کنیم X یک مجموعهٔ دلخواه و $\mathcal{B}_X$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های X باشد. $\mathcal{B}_X$ را یک **جبر** گوئیم هرگاه

۱) $\varnothing\ ,\ X \in \mathcal{B}_X$

۲) $E \in \mathcal{B}_X \Rightarrow E^c \in \mathcal{B}_X$

۳) برای $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ از عناصر $\mathcal{B}_X$ داشته باشیم $\bigcup_{n=1}^{k} E_n \in \mathcal{B}_X$

مثال ۲.۵.۵. فرض کنیم $X=\mathbb{N}$ و $\mathcal{B}_X$ یک $\sigma-$جبر متشکل از تمام زیر مجموعه‌های X باشد. برای هر $E\in\mathcal{B}_X$ تعریف می‌کنیم

$$\mu(E)=\begin{cases} |E| & \text{اگر } E \text{ باپایان باشد,} \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که $|E|$ همان کاردینال مجموعهٔ E است. لذا μ یک اندازه است که به آن اندازهٔ شمارشی روی $\mathbb{N}$ گوئیم. بعلاوه این اندازه $\sigma-$ باپایان است.

ملاحظه ۲.۵.۶. *در مجموعهٔ اعداد $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C})$ جبر تولید شده توسط تمام گویهای باز در $\mathbb{K}$ را* **جبر بورل** *گوئیم و آنرا با B نشان می دهیم که جبر تولید شده شامل تمام گویهای بسته نیز خواهد بود. هر عضو B را* **مجموعهٔ بورل** *گوئیم. جبر بورل روی $\mathbb{R}$ شامل تمام مجموعه‌های نیم باز نیز خواهد بود.*

فصل ۳

فضای هیلبرت

این فصل را به تعریف ضرب داخلی و فضای هیلبرت و عملگرها روی این فضا اختصاص می دهیم.

۱.۳ فضای ضرب داخلی و فضای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک **ضرب داخلی** روی X، تابعی است مانند $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to\mathbb{K}$ بطوریکه بازاء هر $a,b\in\mathbb{K}$ و هر $x,y,z\in X$ داشته باشیم:

(آ) $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$

(ب) $\langle x,ay+bz\rangle = \overline{a}\langle x,y\rangle + \overline{b}\langle x,z\rangle$

(پ) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

(ت) $\langle x,x\rangle \geq ۰$

(ث) $\langle x,x\rangle = ۰$ اگر و تنها اگر $x=۰$

$\langle x,y\rangle$ را ضرب داخلی x و y نامیم. تابع ضرب داخلی $\langle x,y\rangle$ نسبت به متغیر x خطی و نسبت به متغیر y خطی-مزدوج است، یعنی بازاء هر $x,y,z\in X$ و هر $\alpha\in\mathbb{K}$ داریم:

$$\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$$
$$\langle x,\alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle$$

به فضای برداری X همراه با ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle$ یک **فضای ضرب داخلی** گوئیم و با $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ نشان می‌دهیم. اگر $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، نرم را می توان بصورت $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ روی آن تعریف کرد، که آن را **نرم تولید شده توسط ضرب داخلی** نامیم. بنابراین فضای ضرب داخلی فضائی نرمدار است و بعلاوه بازاء هر $x,y\in X$ داریم :

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \qquad \text{(نامساوی شوارتز)}$$
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(نامساوی مثلثی)}$$
$$\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲) \qquad \text{(اتحاد متوازی الاضلاع)}$$

ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یک تابع پیوسته روی $X \times X$ تعریف می کند، زیرا اگر (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی در X باشند که $x_n \to x \in X$ و $y_n \to y \in X$، آنگاه با استفاده از نامساوی شوارتز و نامساوی مثلثی و اینکه دنبالهٔ $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ کراندار می باشد، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \end{aligned}$$

و پیوستگی ضرب داخلی از آن نتیجه می شود.

تعریف ۲.۱.۳. یک فضای ضرب داخلی X را یک **فضای هیلبرت** نامیم، هرگاه X نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی، باناخ (کامل) باشد. یک فضای هیلبرت را با H یا $\mathcal{H}$ نشان خواهیم داد.

مثال ۳.۱.۳. $\mathbb{R}^n$ با نرم تعریف شدهٔ مثال ۲.۴.۲ یک فضای هیلبرت است. $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y_1} + \cdots + x_n \bar{y_n}$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ یک فضای ضرب داخلی و با نرم

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

که بوسیلهٔ ضرب داخلی تولید شده یک فضای نرمدار باناخ و در نتیجه هیلبرت می باشد. همچنین فضای دنباله ℓ^2 که فضای متشکل از تمام دنباله‌های $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ از اسکالرها که برای آنها $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ با نرم $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2}$ یک فضای باناخ و در نتیجه هیلبرت است. ℓ^2 را **فضای دنباله هیلبرت** گوئیم. تذکر اینکه هرچند فضای ضرب داخلی، فضائی نرمدار است ولی همهٔ فضاهای نرم دار، فضای ضرب داخلی نیستند. با این تعاریف به مفهوم تعامد می پردازیم که جهت بحث ما را تعیین می کند.

تعریف ۴.۱.۳. عناصر x و y از یک فضای حاصلضرب داخلی X را متعامد گوئیم اگر $\langle x, y \rangle = 0$ و در این حالت می نویسیم $x \perp y$. مسلماً $x \perp y$ و $y \perp x$ معادلند. برای مجموعه های $A, B \subseteq X$، می نویسیم $x \perp A$ اگر برای هر a ی متعلق به A، $x \perp a$. همینطور می نویسیم $A \perp B$ اگر برای هر a در A و هر b در B داشته باشیم $a \perp b$. در فضای هیلبرت H مجموعهٔ $S \subseteq H$ را **متعامد یکه** گوئیم، اگر نرم هر بردار S برابر واحد بوده و هر دو بردار مجزا در S متعامد باشند.

۲.۳ عملگر خطی

تعریف ۱.۲.۳. اگر X و Y فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشند، عملگرخطی T عبارتست از نگاشت $T : D(T) \subseteq X \to Y$ با دامنهٔ $D(T)$ بطوریکه بازای هر $x, y \in D(T)$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

دامنهٔ $D(T)$ زیرفضای برداری X و برد T یعنی $R(T)$ نیز زیرفضای برداری Y است. معمولاً از نماد Tx بجای $T(x)$ استفاده می‌شود. روی فضای برداری X **عملگر همانی** بصورت $Tx = x$ **تعریف** شده و آنرا با I نشان می دهیم. عملگر $T : D(T) \to R(T)$ را **وارونپذیر** گوئیم اگر بعنوان یک نگاشت وارونپذیر باشد، یعنی یک به یک باشد. این به معنای آنست که عملگری مانند $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ موجود است چنانکه

$$T^{-1}Tx = Ix \ , \ x \in D(T)$$
$$TT^{-1}y = Iy \ , \ y \in R(T)$$

بجای آنکه بگوئیم T وارونپذیر است گوئیم T^{-1} موجود است. بوضوح عملگر T وارونپذیر است اگر و تنها اگر معادلهٔ $Tx = 0$ دارای جواب یکتای $x = 0$ باشد.

فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار و $T : D(T) \subset X \to Y$ یک عملگر خطی باشد. عملگر T را **کراندار** گوئیم هرگاه عدد حقیقی $c \geq 0$ موجود باشد به طوری که

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\| \quad , \quad \forall x \in D(T)$$

در اینصورت c را یک کران برای T خوانیم. باید توجه داشت در سمت چپ نامساوی فوق، نرم روی Y و در سمت راست، نرم روی X است. برای عملگر خطی کراندار T، **نرم** را چنین تعریف می کنیم:

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in D(T), x \neq 0\right\}$$

یا بطور معادل

$$\|T\| = \sup\left\{\,\|Tx\| : x \in D(T), \|x\| = 1\right\}$$

برای عملگر همانی I، همواره $\|I\| = 1$. همچنین برای دو عملگر خطی کراندار S, T مشروط بر اینکه ضرب ST تعریف شده باشد داریم $\|ST\| \leq \|S\|\,\|T\|$. مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y را با $\mathcal{L}(X,Y)$ و مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی و کراندار، از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y را با $\mathcal{B}(X,Y)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که $\mathcal{L}(X,Y)$ و $\mathcal{B}(X,Y)$ همراه با جمع و ضرب اسکالر نقطه وار و نرم تعریف شده در فوق، فضای نرم دار می باشند و چنانچه Y باناخ باشد، آنگاه $\mathcal{L}(X,Y)$ و $\mathcal{B}(X,Y)$ نیز فضای باناخ خواهند بود. اگر $X = Y$ باشد، مجموعه‌های فوق را به ترتیب با $\mathcal{L}(X)$ و $\mathcal{B}(X)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۲.۳. اگر X و Y فضای ضرب داخلی باشند، عملگر $T : X \to Y$ را **یکریختی** نامیم، هرگاه خطی کراندار و وارونپذیر باشد. همچنین عملگر T را **طولپائی** نامیم اگر $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$. مسلماً I طولپائی است و بعلاوه یکریختی $T : X \to Y$ نیز یک عملگر خطی دوسوئی است که ضرب را حفظ می کند، یعنی $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ لذا یکریختی T یک طولپائی روی X است.

تعریف ۳.۲.۳. فرض کنید (T_n) یک دنباله از عملگرهای خطی کراندار روی فضای نرم دار X و T نیز یک عملگری خطی کراندار روی X باشد. آنگاه (T_n) را **همگرای قوی** به T گوییم هرگاه

$$\|T_n - T\| \to 0$$

وقتی که $n \to \infty$، و می‌نویسیم $T_n \to T$.

لم ۴.۲.۳. *فرض کنیم $T \in \mathcal{B}(X)$ که X یک فضای باناخ و نرم دار است. گیریم $\|T\| < 1$ دراینصورت $(I-T)^{-1}$ بعنوان یک عملگر خطی‌کراندار روی X موجود است بطوری که*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{j \geq 0} T^j$$

برهان. چون $\|T\| < 1$ و $\|T^j\| \leq \|T\|^j$ پس طبق آزمون مقایسه سری $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\|$ همگراست، بنابراین سری $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ همگرای مطلق است. چون $\mathcal{B}(X)$ کامل است همگرائی مطلق، همگرائی را نتیجه خواهد داد. فرض کنیم $S \in \mathcal{B}(X)$ و $S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$ نشان می دهیم $S = (I-T)^{-1}$. بوضوح خواهیم داشت:

$$(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^n) = (I+T+T^2+\cdots+T^n)(I-T) = I - T^{n+1}$$

و وقتی $n \to \infty$ آنگاه $T^{n+1} \to 0$، که این نشان می دهد $(I-T)S = S(I-T) = I$ یعنی داریم $S = (I-T)^{-1}$. □

تعریف ۵.۲.۳. فرض کنیم X و Y فضاهای نرم دار باشند. عملگر خطی $T : X \to Y$ را **عملگر خطی فشرده** گوئیم، هرگاه برای هر مجموعهٔ کراندار $M \subseteq X$، تصویر $T(M)$ در Y فشردهٔ نسبی باشد (یعنی بستار $\overline{T(M)}$ در Y فشرده باشد).

قضیه ۶.۲.۳. *فرض کنیم X و Y فضاهای نرم دار و $T : X \to Y$ عملگر خطی باشد. آنگاه T فشرده است اگر و تنها اگر هر دنبالهٔ کراندار (x_n) در X، دارای یک زیر دنباله (x_{n_k}) باشد که (Tx_{n_k}) در Y همگرا شود.*

برهان. فرض کنید T یک عملگر خطی فشرده و دنبالهٔ (x_n) در X کراندار باشد. مجموعهٔ کراندار M را بصورت

$$M = \{x_1, x_2, \cdots\}$$

در نظر می گیریم. چون T فشرده است پس $T(M)$ در Y فشرده نسبی در نتیجه $\overline{T(M)}$ در Y فشرده است. با توجه به فشردگی $\overline{T(M)}$ در Y، هر دنباله در $\overline{T(M)}$ از جمله دنباله $T(x_n)$ دارای زیر دنباله‌ای همگرا در $\overline{T(M)}$ به شکل (Tx_{n_k}) می‌باشد.

به عکس، فرض کنیم B یک زیرمجموعهٔ کراندار X باشد، ثابت می‌کنیم $T(B)$ در Y فشردهٔ نسبی است. گیریم $(y_n) = (Tx_n)$ دنباله‌ای در $T(B)$ باشد که در آن (x_n) دنباله‌ای در B است. چون B کراندار است پس (x_n) دارای یک زیردنبالهٔ (x_{n_k}) خواهد بود بطوری که (Tx_{n_k}) در Y همگرا می‌شود. اگر $y_{n_k} = Tx_{n_k}$ باشد، آنگاه دنباله (y_n) دارای زیردنباله y_{n_k} خواهد بود که در Y همگراست، لذا $T(B)$ فشرده نسبی است. □

قضیه ۷.۲.۳. *فرض کنیم X و Y فضاهای نرم دار و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد،*
الف) اگر T کراندار و $\dim T(X) < \infty$ باشد، آنگاه T فشرده خواهد بود.
ب) اگر $\dim X < \infty$ باشد، آنگاه عملگر خطی T فشرده است.

برهان. (الف) گیریم (x_n) یک دنبالهٔ کراندار در X باشد. بنابه فرض T کراندار است پس

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\|$$

این نشان می دهد که دنبالهٔ (Tx_n) در Y کراندار است. مجموعهٔ D را بصورت $D = \{Tx_۱, Tx_۲, \cdots\}$ تعریف می کنیم. واضح است که D یک مجموعهٔ کراندار می باشد، پس $\overline{D}$ بسته و کراندار است. از طرفی طبق فرض $\dim T(X) < \infty$، لذا $T(X)$ بسته است و $D \subseteq T(X)$. در نتیجه

$$\overline{D} \subseteq \overline{T(X)} = T(X)$$

چون $\overline{T(X)}$ با بعد متناهی است یعنی $\overline{D}$ فشرده است. پس هر دنباله در $\overline{D}$ از جمله $\{Tx_۱, Tx_۲, \cdots\}$ دارای زیر دنبالهٔ همگراست و این فشردگی T را ثابت می کند.
(ب) چون $\dim(X) < \infty$ نتیجه می‌گیریم که T کراندار است. از قسمت (آ) استفاده کرده و فشردگی T اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۸.۲.۳. *گیریم X یک فضای نرم دار، $T : X \to X$ عملگرخطی فشرده و $S : X \to X$ یک عملگر خطی کراندار باشد. آنگاه TS و ST عملگرهای فشرده خواهند بود.*

برهان. فرض کنیم $B \subseteq X$ یک مجموعه کراندار باشد. چون S عملگر خطی کراندار است، پس $S(B)$ یک مجموعه کراندار خواهد بود. از طرفی T یک عملگر خطی فشرده است و در نتیجه $TS(B)$ یک مجموعهٔ فشرده نسبی می باشد، یعنی TS یک عملگر خطی فشرده می‌شود. برای اثبات فشردگی عملگر خطی ST، دنبالهٔ کراندار (x_n) در X را در نظر می‌گیریم. زیر دنبالهٔ (x_{n_k}) از (x_n) هست که دنبالهٔ (Tx_{n_k}) به نقطه‌ای از X مانند $x_۰$ همگراست. از اینرو خواهیم داشت

$$Tx_{n_k} \to x_۰ \Rightarrow ST(x_{n_k}) \to S(x_۰)$$

یعنی ST یک عملگر خطی فشرده است. $\square$

تعریف ۹.۲.۳. فرض کنیم $H_۱$ و $H_۲$ فضاهای هیلبرت و $T : H_۱ \to H_۲$ نیز یک عملگر خطی کراندار باشد. عملگر $T^* : H_۲ \to H_۱$ را **عملگرالحاقی هیلبرت** T گوئیم، هرگاه برای هر $x \in H_۱$ و هر $y \in H_۲$،

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

برای عملگر خطی کراندار T، عملگر الحاقی هیلبرت T^* همواره وجود داشته، خطی و کراندار بوده و یکتاست و بعلاوه $\|T^*\| = \|T\|$.
اثبات وجود و یکتائی و ویژگیهای عملگر الحاقی در [۴] آمده است. مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی خودالحاق روی فضای هیلبرت را با $\mathcal{L}_R(H)$ نشان می دهیم، که یک فضای حقیقی خطی است. یعنی

$$\mathcal{L}_R(H) = \{T \in \mathcal{L}(H) | T = T^*\}$$

عملگر الحاقی هیلبرت برای ما اهمیت خاصی دارد و دارای خواص زیادی است که در بحثمان خواهیم آورد. از جمله اینکه اگر $S,T \in \mathcal{L}_R(H)$ با الحاقی های $S^*,T^* \in \mathcal{L}_R(H)$ سپس

$$(S+T)^* = S^* + T^* \quad , \quad (ST)^* = T^*S^*$$

حال نوع خاصی از عملگرها موسوم به عملگر یکانی را بصورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۱۰.۲.۳. عملگر $U \in \mathcal{L}(H)$ را روی فضای هیلبرت H **یکانی** گوئیم هرگاه U دوسوئی بوده و $U^* = U^{-1}$.

عملگرهای یکانی از آنجا که پایه های متعامد یکه را به پایه های متعامد یکه می نگارند، مورد توجه هستند. اگر U عملگر یکانی باشد، U یکریختی و طولپائی خواهد بود زیرا

$$\langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^*Ux\rangle = \langle x, x\rangle \Rightarrow \|Ux\| = \|x\|$$

یعنی $\|U\| = 1$. علاوه بر اینها حاصلضرب دو عملگر یکانی، یکانی است. عملگر $T \in \mathcal{L}(H)$ را **نرمال** گوئیم اگر $TT^* = T^*T$. بدیهی است که عملگر یکانی، نرمال نیز هست. این شرط را که یک عملگر، یکانی باشد را در زیر بیان می کنیم.

لم ۱۱.۲.۳. *عملگر خطی‌کراندار T روی فضای هیلبرت H یکانی است اگر و تنها اگر T ایزومتری و پوشا باشد.*

برهان. اگر T ایزومتری و پوشا باشد، لذا دوسوئی است و برای نشان دادن $T^* = T^{-1}$ می نویسیم

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle$$

که نتیجه می دهد $\langle (T^*T - I)x, x\rangle = 0$ یعنی $T^*T = I$. از طرفی دیگر نیز داریم:

$$TT^* = TT^*(TT^{-1}) = TIT^{-1} = I$$

یعنی T یکانی است. عکس آن نیز بدیهی است. □

تعریف ۱۲.۲.۳. اگر S و T عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت H باشند، عملگر T را **هم ارز یکانی** با عملگر S گوئیم، اگر عملگر یکانی U روی H چنان موجود باشد که

$$T = USU^{-1} = USU^*$$

بدیهی است که هرگاه S خودالحاق باشد، آنگاه T نیز خودالحاق است.

۳.۳ عملگر تصویر و فضای متعامد

تعریف ۱.۳.۳. زیرفضای Z از فضای هیلبرت H را **مکمل** زیرفضای $X \subset H$ نامیم، اگر X و Z اشتراک بدیهی داشته باشند و بعلاوه $H = X + Z$.

این تعریف بدین معناست که هر عنصر $h \in H$ را می توان بطور یکتا(زیرا اشتراک بدیهی است) بصورت $h = x + z$ تجزیه نمود که در آن $x \in X$ و $z \in Z$ است (این جمله را می توان بعنوان تعریف دیگری از زیرفضای مکمل نیز بکار برد، ولی در ادامهٔ بحث، ما وجود و یکتائی این تجزیه را از تعریف بالا ثابت خواهیم نمود). اگر X مکمل Z باشد، Z نیز مکمل X است و آنها را **زیرفضاهای مکمل** می نامیم. اگر X و Y زیرفضاهای فضای هیلبرت H باشند، Z را **مکمل مشترک** X و Y گوئیم هرگاه Z با X و Y اشتراک بدیهی داشته و نیز داشته باشیم

$$H = X + Z = Y + Z$$

تعریف ۲.۳.۳. در فضای باناخ H اگر Z مکمل X باشد، **تصویرکج** $\mathcal{P}_{X\|Z}$ برروی X موازی با Z را چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{P}_{X\|Z}(x+z) = x \quad , x \in X \ , \ z \in Z$$

تعریف ۳.۳.۳. در فضای نرمدار X فاصله عنصر $x \in X$ از زیرمجموعهٔ ناتهی $\phi \neq S \subseteq X$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$dist(x, S) = \inf_{\hat{y} \in S} \|x - \hat{y}\|$$

طبق قضیهٔ زیر چنین عنصری تحت شرایطی موجود و یکتاست.

قضیه ۴.۳.۳. *اگر X یک فضای ضرب داخلی و $S \neq \phi$ زیرمجموعهٔ محدب و نیزکامل (تحت متریک القائی توسط حاصلضرب داخلی) باشد، آنگاه برای هر $x \in X$ یک و تنها یک $y \in S$ هست که*

$$\delta = dist(x, S) = \inf_{\hat{y} \in S} \|x - \hat{y}\| = \|x - y\|$$

برهان. مطابق تعریف inf دنبالهٔ $\{y_n\}$ از اعضای S را چنان می توان یافت که $\delta_n = \|x - y_n\|$ و $\delta_n \to \delta$. نشان میدهیم که $\{y_n\}$ کوشی است. مینویسیم $y_n - x = v_n$ و لذا $\delta_n = \|v_n\|$ ازاینجا داریم:

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - ۲x\| = ۲\left\|\frac{۱}{۲}(y_n + y_m) - x\right\| \geq ۲\delta$$

چون S محدب است مطابق تساوی متوازی الاضلاع می نویسیم:

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^{۲} &= \|v_n - v_m\|^{۲} \\ &= -\|v_n + v_m\|^{۲} + ۲(\|v_n\|^{۲} + \|v_m\|^{۲}) \\ &\leq -(۲\delta)^{۲} + ۲(\delta_n^{۲} + \delta_m^{۲}) \end{aligned}$$

و چون $\delta_n \to \delta$ لذا $\{y_n\}$ کوشی خواهد بود. طبق کامل بودن S دنباله $\{y_n\}$ در S همگراست. گیریم $y_n \to y \in S$ پس $\|x - y\| \geq \delta$ در نتیجه

$$\|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \to \delta$$

یعنی $\|x - y\| = \delta$.

برای یکتائی $y \in S$ فرض کنیم $y_1 \in S$ چنانست که $\|x-y\| = \|x-y_1\| = \delta$، آنگاه مطابق تساوی متوازی الاضلاع خواهیم داشت:

$$\|y-y_1\|^2 = \|(y-x)-(y_1-x)\|^2 = 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y+y_1)-x\right\|^2$$

اما بنا بفرض S محدب است پس $\frac{1}{2}(y+y_1) \in S$ و لذا $\left\|\frac{1}{2}(y-y_1)-x\right\| \geq \delta$ که با جایگذاری در تساوی قبل نتیجه می دهد که $\|y-y_1\| \leq 0$ یعنی $y = y_1$. □

چنین $y \in S$ منحصر بفردی که در رابطهٔ $\|x-y\| = \inf_{\hat{y}\in S}\|x-\hat{y}\|$ صدق می کند را تصویر بردار x روی S نامیم. اگر S زیرفضای بستهٔ فضای هیلبرت H باشد، این عنصر را با $\mathbf{P}_S x$ نشان می دهیم. نگاشت $\mathbf{P}_S : H \to S$ که $\mathbf{P}_S x \longmapsto x$ را **عملگر تصویری (یا تصویرمتعامد)** H بروی S می نامیم. بنابر آنچه در ذیل خواهیم آورد، $\mathbf{P}_S$ عملگری خطی و کراندار است و بعلاوه خود توان بوده (یعنی $\mathbf{P}_S^2 = \mathbf{P}_S$) و $\mathbf{P}_S|S$ عملگری همانی روی S است، یعنی اگر $x \in S$ آنگاه $\mathbf{P}_S x = x$.

لم ۵.۳.۳. *اگر S یک زیرفضای بستهٔ H باشد، آنگاه* $\forall x \in H \ : \ (x-\mathbf{P}_S x) \perp S$

برهان. از آنجا که S یک زیرفضاست و $\mathbf{P}_S x \in S$، آنگاه برای هر اسکالر α و هر بردار $y \in S$ داریم

$$\mathbf{P}_S x + \alpha y \in S$$

گیریم $\delta = \|x-\mathbf{P}_S x\|$ همان δی مذکور در قضیهٔ قبل باشد، طبق تعریف $\mathbf{P}_S x$ می نویسیم:

$$\delta^2 \leq \|x-(\mathbf{P}_S x+\alpha y)\|^2 = \|x-\mathbf{P}_S x\|^2 + |\alpha|^2\,\|y\|^2 - \overline{\alpha}\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle - \alpha\langle y, x-\mathbf{P}_S x\rangle$$

سپس

$$0 \leq |\alpha|^2\,\|y\|^2 - \overline{\alpha}\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle - \alpha\langle y, x-\mathbf{P}_S x\rangle \ , \ \ \forall\alpha$$

اکنون با فرض $\alpha = \beta\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle$ که β حقیقی است، خواهیم داشت:

$$0 \leq \beta^2|\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle|^2\,\|y\|^2 - 2\beta|\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle|^2$$

که نامساوی آخر برای هر β برقرار است لذا می بایست $|\langle x-\mathbf{P}_S x, y\rangle|^2 = 0$ بنابراین $(x-\mathbf{P}_S x) \perp y$ و چون $y \in S$ دلخواه است بنابراین $(x-\mathbf{P}_S x) \perp S$. □

اکنون می توانیم هر عنصر $h \in H$ را به دو عنصر دیگر تجزیه کنیم. این مفهوم که قضیهٔ تجزیهٔ متعامد نام دارد در فضاهای $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ بطور معمول بکار رفته و هر عنصر را می توان به حاصلجمع مختصات جداگانه ای تجزیه کرد.

قضیه ۶.۳.۳. *(**قضیهٔ تجزیهٔ متعامد**) اگر S زیرفضای بستهٔ یک فضای هیلبرت H باشد. هر بردار $x \in H$ را می توان بطور یکتا بصورت مجموع $x = y+z$ که $y \in S$ و $z \perp S$ نمایش داد که در آن $y = \mathbf{P}_S x$ و $z = x-\mathbf{P}_S x$ خواهد بود.*

برهان. می نویسیم

$$x = \mathbf{P}_S x + (x - \mathbf{P}_S x)$$

که $\mathbf{P}_S x \in S$ بوده و بنابر لم قبل نیز $S \perp (x - \mathbf{P}_S x)$ است. اگر x دارای نمایش دیگری بصورت $x = y + z$ باشد که $y \in S$ و $z \perp S$، از دو تساوی بالا داریم $y + z = \mathbf{P}_S x + (x - \mathbf{P}_S x)$ که نتیجه می دهد

$$y - \mathbf{P}_S x = (x - \mathbf{P}_S x) - z \qquad (۱)$$

از طرفی چون $y - \mathbf{P}_S x \in S$ و $(x - \mathbf{P}_S x) - z \perp S$ بنابراین

$$y - \mathbf{P}_S x \perp (x - \mathbf{P}_S x) - z \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) و از آنجا که تنها برداری که بر خودش عمود است، بردار صفر است خواهیم داشت

$$y - \mathbf{P}_S x = (x - \mathbf{P}_S x) - z = ۰$$

و لذا $y = \mathbf{P}_S x$ و $z = x - \mathbf{P}_S x$ خواهد بود. □

نمایش بردار x بصورت $x = \mathbf{P}_S x + (x - \mathbf{P}_S x)$ را **تجزیهٔ متعامد** x **نسبت به** S نامیم. در قضیهٔ زیر خواصی از عملگر تصویری را ذکر می کنیم که در ادامهٔ بحث از آنها بهره فراوان خواهیم برد. اگر H فضای هیلبرت و $S \subset H$ باشد، تعریف می کنیم

$$S^{\perp} = \{y : y \perp x, \ \forall x \in S\}$$

گاهی هم می نویسیم $S^{\perp} = H \ominus S$. البته $H^{\perp} = \{۰\}$ و $\{۰\}^{\perp} = H$. قضیهٔ ۶.۳.۳ نشان دهندهٔ این است که اگر S یک زیرفضای بستهٔ H باشد، آنگاه $H = S + S^{\perp}$. بعلاوه تصویر H روی $S^{\perp}$ عبارتست از $I - \mathbf{P}_S$. قبل از بیان قضیهٔ زیر یادآوری می کنیم که فضای پوچ عملگر کراندار(پیوسته) $T : X \to Y$ عبارتست از مجموعهٔ

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = ۰\}$$

و از پیوستگی T براحتی ثابت می شود که فضای پوچ بسته است.

قضیه ۷.۳.۳. *عملگر خطی کراندار $P : H \to H$ روی یک فضای هیلبرت H یک عملگر تصویری است اگر و تنها اگر P خودالحاق و خودتوان $(P^۲ = P)$ باشد.*

برهان. (آ) فرض کنید P یک تصویر روی H است و $S = P(H)$ لذا $P^۲ = P$ زیرا

$$\forall x \in H : Px = y \in S, \ P^۲ x = P(Px) = Py = y = Px$$

بعلاوه اگر $x_۱ = y_۱ + z_۱ \in H$ و $x_۲ = y_۲ + z_۲ \in H$ که در آن $y_۱, y_۲ \in S$ و $z_۱, z_۲ \in S^{\perp}$ پس

$$< y_۱, z_۲ >=< z_۱, y_۲ >= ۰$$

زیرا $S \perp S^{\perp}$ و خودالحاقی P از زیر نتیجه می شود

$$\langle Px_۱, x_۲\rangle = \langle y_۱, y_۲ + z_۲\rangle = \langle y_۱, y_۲\rangle = \langle y_۱ + z_۱, y_۲\rangle = \langle x_۱, Px_۲\rangle$$

(ب) برعکس اگر P خودالحاق و خودتوان باشد یعنی $P^۲ = P = P^*$، آنگاه خواهیم داشت

$$\forall x \in H : x = Px + (I - P)x$$

عبارت

$$\langle Px, (I-P)v\rangle = \langle x, P(I-P)v\rangle = \langle x, Pv - P^۲v\rangle = \langle x, ۰\rangle = ۰$$

برای هر $x, v \in H$ ، تعامد $S = P(H) \perp (I-P)(H)$ را نتیجه می دهد.
همچنین داریم $S = \mathcal{N}(I-P)$ (که $\mathcal{N}$ فضای پوچ است) زیرا اگر $x \in \mathcal{N}(I-P)$ یعنی $Px = x$ پس $x \in S$ یعنی $\mathcal{N}(I-P) \subset S$، و از طرفی دیگر اگر $y \in S$ باشد، آنگاه xی هست که $Px = y$ و لذا

$$(I-P)y = (I-P)Px = (P - P^۲)x = ۰$$

یعنی $S \subset \mathcal{N}(I-P)$ و بنابراین $S = \mathcal{N}(I-P)$. چون فضای پوچ بسته است لذا S بسته است، بعلاوه $P\mid_S$ روی S همانی است زیرا اگر بنویسیم $y = Px$، داریم

$$Py = P^۲x = Px = y$$

واثبات تمام است. □

از مطالب گفته شده در قضایای قبل دربارهٔ عملگر تصویر براحتی می توان خواص زیادی از این عملگر را بدست آورد، بخصوص اینکه اساس کار ما بر تعامد و عملگر تصویر قرار خواهد داشت. اکنون تحت قضیه ای در ذیل، خواصی چند از عملگر تصویر را ذکر می کنیم که اثبات آنها در خلال مطالب قبل ذکر شده است. خوانندهٔ علاقمند می تواند برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ عملگر تصویری به [۳] قضیهٔ ۲٫۳٫۳ رجوع کند.

قضیه ۸.۳.۳. *اگر $\mathbf{P}_S$ عملگر تصویر در فضای هیلبرت H بر روی S باشد، آنگاه برای هر $x, y \in H$ داریم:*

آ) $\langle \mathbf{P}_S x, y\rangle = \langle \mathbf{P}_S x, \mathbf{P}_S y\rangle = \langle x, \mathbf{P}_S y\rangle$

ب) $\langle \mathbf{P}_S(\mathbf{P}_S x), y\rangle = \langle \mathbf{P}_S x, y\rangle$

پ) $\langle \mathbf{P}_S x, x\rangle = \|\mathbf{P}_S x\|^۲$

ت) $\|\mathbf{P}_S x\| \leq \|x\|$

ث) $\|x\|^۲ = \|x - \mathbf{P}_S x\|^۲ + \|\mathbf{P}_S x\|^۲$

ج) $S = \{x : \mathbf{P}_S x = x\} = \{x : \|\mathbf{P}_S x\| = \|x\|\}$

چ) $\mathbf{P}_S x = ۰ \iff x \perp S$

ح) $\mathbf{P}_S(ax + by) = a\mathbf{P}_S x + b\mathbf{P}_S y$

خ) $\mathbf{P}_S H = S$

اکنون می خواهیم روی عملگرهای خودالحاق، ترتیب را تعریف کنیم. بنابراین فرض کنید که $T : H \to H$ عملگر خطی کراندار و خودالحاق روی فضای هیلبرت H باشد. از آنجا که

$$\overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle$$

لذا برای هر $x \in H$، مقدار $\langle Tx, x\rangle$ حقیقی است. مانند ترتیب روی اعداد حقیقی، ترتیب جزئی $\leq$ را می توان روی عملگرهای خودالحاق چنین تعریف نمود:

$$T_1 \leq T_2 \iff \langle T_1 x, x\rangle \leq \langle T_2 x, x\rangle \quad , \quad \forall x \in H$$

که T_1 و T_2 عملگرهای خودالحاقند. بعلاوه $T_1 \geq T_2$ بدین معنی است که $T_1 \leq T_2$، همچنین

$$T_1 \leq T_2 \iff T_1 - T_2 \leq 0$$

بهمین طریق عملگر خطی کراندار خودالحاق $T : H \to H$ را **مثبت** گوئیم هرگاه

$$T \geq 0 \iff \langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad , \quad \forall x \in H$$

واضح است که اگر T عملگری مثبت باشد، الحاقی آن T^* نیز مثبت است. روی این مجموعه می توان جمع و ضرب را تعریف نمود. بوضوح جمع عملگرهای مثبت، مثبت است، برای ضرب عملگرهای مثبت، ذکر می کنیم که ضرب عملگرهای مثبت نیز مثبت است اگر که با هم جابجا شوند. گیریم:

$$\mathcal{L}_R^+(H) = \{T \in \mathcal{L}(H) | T = T^* \geq 0\}$$

توجه کنید که اگر $T \in \mathcal{L}_R(H)$ آنگاه

$$\langle Tx, x\rangle \leq \|Tx\| \, \|x\| \leq \|T\| \, \|x\|^2 = \|T\| \, \langle Ix, x\rangle = \langle \|T\| \, Ix, x\rangle$$

و با تکرار این کار برای $-T$ نتیجه می گیریم که $-\|T\| \, I \leq T \leq \|T\| \, I$ لذا اگر $\mathbf{P}$ عملگر تصویر باشد نتیجه می گیریم $0 \leq \mathbf{P} \leq I$. مانند ریشه دوم اعداد حقیقی، برای هر عملگر مثبتی یک ریشهٔ دوم وجود دارد که در قضیهٔ زیر بیان می شود.

قضیه ۹.۳.۳. *اگر $A \in \mathcal{L}_R(H)$ و $A \geq 0$ آنگاه یک و تنها یک عملگر $B \in \mathcal{L}_R(H)$ وجود دارد چنانکه $A = B^2$. عملگر B با هر عملگری که با A جابجا شود، جابجا می‌شود.*

برهان. ر.ک.[۳] قضیهٔ ۴,۲,۳ و یا [۴] قضیهٔ ۴,۲-۹. □

قضیهٔ زیر که به *قضیهٔ تجزیهٔ قطبی* معروف است از قضایای کاربردی روی عملگرهای خودالحاق بشمار می رود و ساختاری شبیه تجزیهٔ قطبی اعداد مختلط بصورت $\zeta = re^{i\theta}$ دارد. این قضیه، با شرایط مختلف بیان شده و ما در اینجا تجزیهٔ قطبی یک یکریختی را بیان می کنیم. در اینجا قابل ذکر است که برای A و B در قضیهٔ ۹.۳.۳ گاهی می نویسیم $B = A^{\frac{1}{2}}$.

قضیه ۱۰.۳.۳. ***(تجزیهٔ قطبی)*** *فرض کنید $A : H_1 \to H_2$ یک یکریختی (عملگر کراندار وارونپذیر) بین دو فضای هیلبرت باشد و گیریم $R = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. آنگاه A دارای نمایش $A = UR$ است که در آن $U : H_1 \to H_2$ عملگری یکانی است.*

برهان. از آنجا که $\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^۲ \geq ۰$ پس A^*A عملگری مثبت بوده و طبق قضیهٔ ۳,۵-۳ دارای ریشه دوم مثبت است، گیریم $R = (A^*A)^{\frac{۱}{۲}}$ ریشهٔ دوم مثبت آن باشد، چون A وارونپذیر است می توان نوشت $V = RA^{-۱}$ که $V : H_۲ \to H_۱$ که یک طولپائی است زیرا

$$V^*V = (RA^{-۱})^*(RA^{-۱}) = (A^{-۱})^*R^*RA^{-۱} = (A^{-۱})^*A^*AA^{-۱} = I$$

بنابراین گیریم $U = V^{-۱}$، آنگاه $U^{-۱} = RA^{-۱}$ که نتیجه می دهد $A = UR$.

برای یکتائی فرض کنیم $UR = U_۰R_۰$. با گرفتن الحاقی از دو طرف خواهیم داشت $RU^* = R_۰U_۰^*$ لذا

$$R_۰^۲ = R_۰U_۰^*U_۰R_۰ = RU^*UR = R^۲$$

چون ریشهٔ دوم عملگر یکتاست پس $R_۰ = R$ و بنابراین $U_۰ = U$. بعلاوه U طولپائی است زیرا

$$\forall h \in H_۱ :\ \ \|U(Rh)\|^۲ = \|Ah\|^۲ = \langle Ah, Ah\rangle = \langle A^*Ah, h\rangle = \langle R^۲h, h\rangle = \langle Rh, Rh\rangle = \|Rh\|^۲$$

و اثبات تمام است. □

۴.۳ همبعد در فضای هیلبرت

تعریف ۱.۴.۳. در فضای نرمدار X یک زیرمجموعهٔ $M \subset X$ را **مجموعهٔ کلی** گوئیم اگر $\overline{SpanM} = X$ باشد. مجموعهٔ کلی که متعامد یکه باشد را **متعامد یکهٔ کلی** گوئیم.

از مهمترین مفاهیم در بحث فضاهای برداری، مفهوم بعد است. بطور کلی فضای هیلبرت H بعنوان یک فضای برداری دارای یک **پایهٔ همل** است. در واقع در هر فضای هیلبرت $H \neq \{۰\}$ یک مجموعهٔ متعامد یکهٔ کلی وجود دارد (ر.ک. [۴]). همهٔ مجموعه های متعامد یکهٔ کلی در فضای هیلبرت $H \neq \{۰\}$ دارای یک عدد اصلی هستند. در واقع لویگ[۱] و رلیچ[۲] ثابت کردند که همهٔ پایه های متعامد یکه در فضای هیلبرت دارای یک عدد اصلی هستند (ر.ک.[۱] قضیهٔ IV.4.14). بنابراین مفهوم بعد در فضای هیلبرت، مفهومی خوش تعریف است، عدد اصلی ذکر شده را **بعد فضای هیلبرت** نامیم و با $\dim H$ نشان می دهیم. در حالت $H = \{۰\}$ تعریف می کنیم $\dim H = ۰$. در حالتی که فضای هیلبرت دارای بعدی متناهی است این عدد، عددی طبیعی خواهد بود. در حالتی که فضای هیلبرت دارای بیش از یک بعد -با حداقل یک بعد نامتناهی- است، بیشینهٔ بعدها در نظر گرفته می شود. بعلاوه اگر دو فضای هیلبرت یکریخت باشند، دارای یک بعد خواهند بود. لذا بعد تحت یکریختی حفظ می شود.

تعریف ۲.۴.۳. **همبعد** زیرفضای X از فضای هیلبرت H را بصورت $\dim X^{\perp}$ تعریف می کنیم و آنرا با $codimX$ نشان می دهیم. همچنین اگر Y زیرفضای دیگری از H باشد تعریف می کنیم

$$codim_Y X = codim(Y \ominus X)$$

.

---

[۱] Lowig

[۲] Rellich

۵.۳ اندازهٔ نیم طیفی و اندازهٔ طیفی

تعریف ۱.۵.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ یک فضای اندازه پذیر باشد. آنگاه تابع $E : \mathcal{B}_X \to \mathcal{L}_R^+(H)$ را **اندازهٔ نیم طیفی** گوئیم اگر در شرایط زیر صدق کند.

آ) $E(X) = I$

ب) برای هر $x \in H$، تابع $\mu_x(\sigma) = \langle E(\sigma)x, x\rangle$ (برای $\sigma \in \mathcal{B}_X$) یک اندازه روی $\mathcal{B}_X$ باشد.

مثال ۲.۵.۳. یک مثال بدیهی از اندازهٔ نیم طیفی را می توان بصورت $E(\sigma) = \mu(\sigma)I$ تعریف نمود، که I عملگر همانی و μ یک اندازهٔ دلخواه روی $\mathcal{B}_X$ است چنانکه $\mu(X) = ۱$. به عنوان یک حالت کلی، اگر $X \subseteq \sigma \subseteq \phi$ باشد که $\sigma \in \mathcal{B}_X$، آنگاه طبق لم ۳.۵.۲ داریم $۰ \leq \mu(\sigma) \leq \mu(X)$ لذا اگر E اندازهٔ نیم طیفی روی $\mathcal{B}_X$ باشد، خواهیم داشت:

$$\langle ۰x, x\rangle \leq \langle E(\sigma)x, x\rangle \leq \langle Ix, x\rangle$$

که نتیجه می دهد $\forall \sigma \in \mathcal{B}_X : \ ۰ \leq E(\sigma) \leq I$.

تعریف ۳.۵.۳. اندازهٔ نیم-طیفی E را یک **اندازهٔ طیفی** گوئیم، اگر برای $\sigma \in \mathcal{B}_X$، مقادیر $E(\sigma)$ی آن *عملگرهای تصویری* باشند.

اکنون برای بیان قضیهٔ مهمی با نام «قضیهٔ طیفی» مقدماتی را ذکر می‌کنیم.

تعریف ۴.۵.۳. اگر T عملگر کرانداری باشد، **طیف عملگر** T را چنین تعریف می کنیم:

$$\sigma_{(T)} = \{\lambda \in \mathbb{K} : (T - \lambda I)x = ۰, \exists x \neq ۰\}$$

و اگر برای $x \neq ۰$، $\lambda \in \mathbb{K}$ی موجود باشد که $(T - \lambda I)x = ۰$ یا $Tx = \lambda x$، این x را **بردار ویژهٔ** متناظر با λ گفته و $\lambda \in \sigma_{(T)}$ را **مقدار ویژهٔ** T گوئیم.

اگر T عملگر نرمال باشد و $۰ \leq T \leq I$ آنگاه برای بدست آوردن طیف T، اگر $x \neq ۰$ و $(T - \lambda I)x = ۰$، خواهیم داشت:

$$-\lambda I \leq T - \lambda I \leq (۱ - \lambda)I \quad \Rightarrow \quad -\lambda Ix \leq (T - \lambda I)x \leq (۱ - \lambda)Ix$$

از اینجا داریم $-\lambda x \leq ۰ \leq (۱ - \lambda)x$ یعنی $۰ \leq \lambda \leq ۱$ و بنابراین $\sigma_{(T)} \subseteq [۰, ۱]$.

برای تبدیلات ماتریسی براحتی می توان مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر را بدست آورد. در حالتی که عملگر T روی فضای هیلبرت متناهی - بعد تعریف شده باشد، تعداد بردارهای ویژه متناهی خواهد بود، زیرا تبدیل هم ارز با تبدیل ماتریسی «متناهی» خواهد شد. اکنون فرض کنید T تبدیلی نرمال روی فضای متناهی - بعد هیلبرت H باشد و $\{x_۱, \cdots, x_m\}$ بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ متمایز $\{\lambda_۱, \cdots, \lambda_m\}$ باشند، این بردارها بر هم عمودند زیرا

$$\lambda_i\langle x_i, x_j\rangle = \langle Tx_i, x_j\rangle = \langle x_i, Tx_j\rangle = \overline{\lambda_j}\langle x_i, x_j\rangle$$

لذا این m بردار متعامد، تشکیل پایه ای برای H داده و از آنجا، طبق مطالب گفته شده در بخش همبعد، $\dim H = m$ خواهد بود. اگر $x \in H$ بنابراین $x = \sum_{j=۱}^{m} \gamma_j x_j$ که $\gamma_j = \langle x, x_j\rangle$ و چون $Tx_j = \lambda_j x_j$

پس

$$Tx = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \lambda_j x_j \qquad (\dagger)$$

حال تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} E_j &: H \to H \\ x &\longmapsto \gamma_j x_j \end{aligned}$$

که بوضوح عملگر تصویر (متعامد) است، زیرا

$$\langle Ex, x\rangle = \langle \gamma_j x_j, x\rangle = \gamma_j \langle x_j, x\rangle = |\langle x_j, x\rangle|^2 = \langle x, Ex\rangle$$

و نیز $E^2x = E(Ex) = E(\gamma_j x_j) = \gamma_j x_j = Ex$ ، که با جایگذاری در $(\dagger)$ نتیجه می شود: $Tx = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j E_j x$ یا

$$T = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j E_j \qquad (\dagger\dagger)$$

این عبارت با اهمیت، عملگر نرمال T را بر حسب مجموعی از عملگرهای تصویری، بیان می کند و با کمی تغییرات برای فضای هیلبرت نامتناهی - بعد نیز برقرار است. در حالت نامتناهی - بعد، مجموع بصورت حد مجموع در می آید که در قالب انتگرال ریمان - اشتیلیس بصورت

$$T = \int \lambda \, dE_\lambda \qquad (\dagger\dagger)$$

بیان می شود، که $\lambda \in \sigma_{(T)}$ و عملگرهای تصویری E_λ تحت شرایطی خاص تعیین می شوند. در واقع یک اندازهٔ طیفی $E(\cdot)$ برای عملگر نرمال T وجود دارد که E_λها از بین مقادیر آن انتخاب می شوند. این بیان که بصورت قضیهٔ بسیار مهمی در نظریهٔ عملگرها مطرح می شود، دارای جزئیات بسیاری است و از قضایای با اهمیت بشمار رفته و آنرا **قضیهٔ طیفی** نامند. قضیه چنین است:

قضیه ۵.۵.۳. (قضیهٔ طیفی) *فرض کنیم T عملگری نرمال و (Ω, B) جبر بورل روی صفحهٔ مختلط شامل $\sigma_{(T)}$ باشد، یک اندازهٔ طیفی $E(\cdot)$ بطور یکتا روی B چنان موجود است که*

$$T = \int_\Omega \lambda dE_\lambda$$

بعلاوه $E(\cdot)$ با هر عملگری که با T و T^* جابجا شود، جابجا خواهد شد.

این قضیهٔ مهم در کتب مختلف بطور مشروح ثابت شده که خواننده می تواند به [۵] قضیهٔ ۱٫۲ و یا [۱] قضیهٔ X.2.1 و نتیجه های X.2.4 و X.2.6 و یا در [۳] بخش ۵٫۶ مراجعه کند. قابل ذکر است که آنچه برای ما مهم است «وجود» این اندازهٔ طیفی برای عملگر نرمال T است که در فصل بعد از آن استفادهٔ فراوانی خواهیم برد. در انتهای این فصل لم زیر را به نقل از [۶] (قضیهٔ ۱۴ صفحهٔ ۳۷۰) بیان می کنیم.

لم ۶.۵.۳. *اگر S و T دو عملگر کراندار خودالحاق روی فضای نامتناهی-بعد هیلبرت H باشند، آنگاه S و T هم ارز یکانی هستند اگر و تنها اگر اندازهٔ طیفی آنها هم ارز یکانی باشد.*

فصل ۴

مکمل مشترک دو زیرفضا

فصل اصلی این مقاله اختصاص به یافتن شروطی برای وجود یک مکمل مشترک برای دو زیرفضا از یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارد [۱]. در ذیل تعریف مکمل مشترک برای دو زیر فضا را بیان نموده و در حالت کلی، بسته به «بعد» فضای هیلبرت دو حالت را در نظر می گیریم. توجه کنید که در این بحث، فرض نمی کنیم که فضای هیلبرت مورد نظر ما *تفکیک پذیر* است یا خیر، زیرا نتایج قضایا برای هر دو حالت برقرار است، مگر اینکه تفکیک پذیری فضا یا خلاف آنرا ذکر کرده باشیم. در سراسر بحث، زیرفضاها را بسته فرض می کنیم. در ابتدا به ذکر مقدمات می پردازیم.

۱.۴ نرم معادل روی فضای هیلبرت

فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی بصورت $\langle\cdot,\cdot\rangle$ باشد و $\mathcal{A}\in\mathcal{L}_R^+(\mathcal{H})$ عملگری وارونپذیر باشد. تعریف می کنیم

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{A}} := \langle \mathcal{A}f,g\rangle$$

در اینصورت $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ یک ضرب داخلی معادل روی $\mathcal{H}$ تعریف می کند که در آن ضرب طرف راست $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ضرب داخلی اولیه روی $\mathcal{H}$ است. واضح است که ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ همان ضرب اولیه است که اعضاء آن از $\mathcal{H}$ انتخاب می شوند. در واقع $\langle \mathcal{A}f,g\rangle$ که $\mathcal{A}$ عملگر« خودالحاق کراندار وارونپذیر و مثبتی» است، یک «فرم یک و نیم خطی» است و این ضرب داخلی جدید، نرمی القائی خواهد داشت که برابر $\|\mathcal{A}\|$ است. جزئیات بیشتر را می توانید در [۴] قضیهٔ ۴–۳٫۸ ببینید. اکنون عملگر مورد نظرمان را مطرح نموده و شرایط بالا را برای ایجاد ضربی داخلی «جدید» بر روی آن بررسی می کنیم.

فرض کنیم $\mathcal{H}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$ جمع متعامد $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ بوده و عملگر دلخواه $G:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ که $\|G\|<۱$ مفروض باشد. اکنون ضرب داخلی ایجاد شده توسط عملگر

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_G=\begin{pmatrix} I & G^* \\ G & I\end{pmatrix} \tag{۱.۴}$$

[۱] در این بخش فضای هیلبرت را با هر دو نماد H و یا $\mathcal{H}$ نشان خواهیم داد.

را روی $\mathcal{H}$ در نظر بگیرید. بایستی بررسی کنیم که $\mathcal{A}_G \in \mathcal{L}_R^+(\mathcal{H})$. برای $\|G\| < 1$ عملگر $\mathcal{A}_G$ مثبت است، زیرا اگر $h \in \mathcal{H}$ بنابراین h بطور یکتا بصورت

$$h = x + y \qquad , x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$$

مشخص می شود. از اینرو خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_G h, h \rangle &= \langle \mathcal{A}_G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} Ix + G^* y \\ Gx + Iy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle Ix, x \rangle + \langle G^* y, x \rangle + \langle Ix, y \rangle + \langle G^* y, y \rangle \\ &+ \langle Gx, x \rangle + \langle Iy, x \rangle + \langle Gx, y \rangle + \langle Iy, y \rangle \end{aligned}$$

حال از آنجا که $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ متعامدند و بعلاوه $Gx \in \mathcal{Y}$ و $G^* y \in \mathcal{X}$، بنابراین تعدادی از عناصر صفر شده و حاصل چنین می شود:

$$\langle \mathcal{A}_G h, h \rangle = \|x\|^۲ + \|y\|^۲ + ۲\Re \langle Gx, y \rangle \qquad (۴)$$

اما $\|G\| < ۱$، و لذا طبق نامساوی

$$-\|x\| \, \|y\| < \langle Gx, y \rangle < \|x\| \, \|y\|$$

مقدار (۴) مثبت خواهد شد. بنابراین $\mathcal{A}_G$ عملگری مثبت است.

برای وارونپذیری $\mathcal{A}_G$ فرض کنید که $\mathcal{A}_G h = ۰$ که در آن

$$h = x + y \quad , x \in X, \; y \in Y$$

لذا داریم:

$$Ix + Gy = ۰ \qquad , \qquad G^* x + Iy = ۰$$

از آنجا که $G^* x = ۰ = Gy$ نتیجه می دهد که $x = y = ۰$ یا $h = ۰$. بنابراین $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_R^+(\mathcal{H})$ و این $\mathcal{A}_G$، ضرب داخلی معادلی را تولید خواهد نمود. در انتها نتیجه می گیریم که نرم ایجاد شده توسط ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ با نرم اولیه روی $\mathcal{H}$ متناظر شده و دو نرم با هم معادل خواهند بود.

ملاحظه ۴.۱.۱. *بعنوان یک حالت خاص وقتی $G = ۰$ آنگاه $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ اعضای $\mathcal{X}$ را به صفر می نگارد، پس $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$ در نرم تولید شده توسط $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_۰$ است.*

۴.۲ مکمل مشترک در فضای هیلبرت با بعد متناهی

تعریف ۴.۲.۱. در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با بعد متناهی، زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Z}$ مکملند اگر

آ) $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \{۰\}$

ب) $\mathcal{X} + \mathcal{Z}$ در $\mathcal{H}$ چگال باشد.

بنابراین در مورد حالت بعد متناهی مسئله براحتی قابل حل است، زیرا در این حالت با در نظر گرفتن یک پایهٔ متناهی، فضای $\mathcal{H}$ تفکیک پذیر و یکریخت با $\mathbb{R}^n$ خواهد شد و از آنجا، اگر $\mathcal{Z}$ مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشد و $\dim Z = k \leq n$، آنگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای یک بعد $n-k$ و لزوماً یکریختند و لذا مکمل مشترکشان در واقع یک فضا بیشتر نخواهد بود.

اگر فرض کنیم $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ و $\mathcal{Z}$ زیرفضاهای فضای متناهی–بعد هیلبرت $\mathcal{H}$ با بعد n باشند و $\mathcal{Z}$ مکمل $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشد، طبق تعریف خواهیم داشت:

$$\mathcal{H} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Z}$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}$$

چون $\dim Z = k \leq n$ بنابراین

$$\mathcal{H} \simeq \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$$

بنابراین هر زیرفضای $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$ با بعد حداکثر k که در $\mathcal{H}$ چگال باشد، مکمل $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ خواهد بود.

۳.۴ مکمل مشترک در فضای هیلبرت با بعد نامتناهی

در حالت نامتناهی - بعد بودن فضا یعنی $\dim \mathcal{H} = \infty$، شرطهای ذکر شده در تعریف ۱.۲.۴ کافی نیستند و شرط دیگری نیز لازم خواهد بود.

تعریف ۱.۳.۴. در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با بعد نامتناهی شرطهای زیر برای مکمل بودن زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Z}$ لازم و کافی می باشند:

آ) $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \{0\}$

ب) $\mathcal{X} + \mathcal{Z}$ در $\mathcal{H}$ چگال است.

ج) اگر $\mathcal{Z}$ مکمل $\mathcal{X}$ باشد، سپس تصویر کج $P_{\mathcal{X}\|\mathcal{Z}}$ عملگری کراندار است.

با این شرط ضروری (ج) که از قضیهٔ نگاشت بسته حاصل شده و ما آنرا بعنوان تعریف پذیرفتیم، در حالت بعد نامتناهی مکمل بودن دو زیرفضا تضمین می شود. اکنون اگر $\mathcal{Z}$ مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشد، ما بدنبال شرطی هستیم که وجود $\mathcal{Z}$ را تضمین کند. برخلاف حالت متناهی - بعد، شرط وجود این مکمل مشترک فراتر از روابط معمول بین بعد و همبعد فضاها خواهد بود، زیرا در اینجا ما با زیرفضاهای با بعد یا همبعد بی نهایت کار می کنیم و نیز ممکن است که زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ بعد و همبعد مساوی داشته باشند، ولی $\mathcal{Y} \subsetneqq \mathcal{X}$ فلذا دارای مکمل مشترک نخواهند بود.

اکنون این مطلب را نشان می دهیم که اگر برای زیرفضای $\mathcal{X}$ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ چند مکمل وجود داشته باشد، آنگاه همهٔ مکمل های آن دارای یک بعد هستند و لذا بعنوان مکمل متعامد نیز دارای یک بعد هستند.

لم ۲.۳.۴. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Z}$ زیرفضاهای مکمل فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند، آنگاه*

$$codim \mathcal{X} = \dim \mathcal{Z}$$

برهان. کافیست نشان دهیم که یک یکریختی (عملگر کراندار وارونپذیر) بین $\mathcal{X}^\perp$ و $\mathcal{Z}$ وجود دارد. گیریم $\mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} : \mathcal{H} \to \mathcal{X}^\perp$ تصویر متعامد برروی $\mathcal{X}^\perp$ باشد و فرض می کنیم

$$\mathcal{P} := \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp}|\mathcal{Z} : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}^\perp$$

اگر $y \in \mathcal{X}^\perp$ پس $y \in \mathcal{H}$. چون $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Z}$ مکملند، طبق قضیهٔ ۶.۳.۳ خواهیم داشت $y = x + z$ بگونه ای که

$$x = \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} y \in \mathcal{X} \quad , \quad z = y - \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} y \in \mathcal{Z}$$

مطابق با قضیهٔ ۸.۳.۳(ت) $\mathbf{P}_{\mathcal{X}}$ کراندار بوده و بنابراین $C > 1$ی وجود دارد چنانکه

$$\|z\| = \|y - \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} y\| \leq \|y\| + \|\mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} y\| \leq C\,\|y\|$$

که نشان می دهد $\mathcal{P}$ کراندار است. برای وارونپذیری $\mathcal{P}$ گیریم

$$z \in \mathcal{Z} \quad , \quad \mathcal{P}z = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp}|\mathcal{Z}(z) = \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} z = 0 \Rightarrow z \perp \mathcal{X}^\perp \Rightarrow z \in \mathcal{X}$$

و چون $z \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \{0\}$ یعنی $z = 0$. بنابراین نگاشت $\mathcal{P}$ یکریختی از $\mathcal{Z}$ برروی $\mathcal{X}^\perp$ است و $\dim \mathcal{X}^\perp = \dim \mathcal{Z}$. □

این لم نشان می دهد که همبعد یک زیرفضا تحت یکریختی (از کل فضا) حفظ می شود. علاوه بر این بین خود فضاهایی که مکمل مشترک دارند نیز یکریختی برقرار است، که در قضیهٔ زیر بیان می گردد. این قضیه در مورد فضاهای باناخ دلخواه نیز برقرار است.

قضیه ۳.۳.۴. *زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای مکمل مشترکند اگر و تنها اگر یک تصویر کراندار $\mathcal{P}$ (نه لزوماً متعامد) برروی یکی از فضاها (مثلاً $\mathcal{Y}$) چنان باشد که عملگر $\mathcal{G} := \mathcal{P}|_{\mathcal{X}}$ که $\mathcal{G} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ یک یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشد.*

برهان. ($\Leftarrow$) اگر $\mathcal{Z}$ مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشد، عملگر تصویر $\mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}} : \mathcal{H} \to \mathcal{Y}$ که کراندار است، را در نظر می گیریم. فرض کنیم

$$\mathcal{G} := \mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}}|\mathcal{X} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

چون $\mathcal{G}$ تحدید $\mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}}$ است، پس $\mathcal{G}$ کراندار است. برای وارونپذیری آن فرض کنیم $x \in \mathcal{X}$ و $\mathcal{G}x = 0$. چون $x \in \mathcal{H}$، لذا $\exists y \in \mathcal{Y}$ و $\exists z \in \mathcal{Z}$ که $x = y + z$ بنابراین

$$\mathcal{G}x = \mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}}|\mathcal{X}(x) = \mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}} x = \mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}}(y + z) = y = 0$$

و از این نتیجه می گیریم $x = z \in \mathcal{Z}$ و $x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \{0\}$ یعنی $\mathcal{G}$ یکریختی است.
($\Rightarrow$) بالعکس اگر چنین $\mathcal{P}$ی موجود باشد، $\mathcal{Z} := Ker\mathcal{P}$ یک مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است. درواقع تصویر $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}}$ کراندار است و اگر $h \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$، آنگاه

$$\mathcal{P}h = 0 \quad , \quad h \in \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}} h = h \Rightarrow \mathcal{P}h = h \Rightarrow h = 0$$

بنابراین $\mathcal{Z}$ یک مکمل $\mathcal{Y}$ است.
از طرفی تصویر $\mathcal{P}_{\mathcal{X}\|\mathcal{Z}}$ بروی $\mathcal{X}$ موازی با $\mathcal{Z}$ را می توان بصورت $\mathcal{P}_{\mathcal{X}\|\mathcal{Z}} = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{P}$ تعریف نمود که کراندار می باشد و $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \{0\}$، لذا $\mathcal{Z}$ یک مکمل $\mathcal{X}$ است. □

تعریف ۴.۳.۴. در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ فرض کنیم $\mathcal{Y}$ و $\mathcal{X}$ زیرفضاهای $\mathcal{H}$ و $\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}$ تصویر متعامد برروی $\mathcal{Y}$ باشد. عملگر **گرامی** $\mathbf{G}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ را بصورت $\mathbf{G}=\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}$ تعریف می کنیم.

عملگر گرامی $\mathbf{G}$، دارای خواص بسیاری است که از آنها استفاده خواهیم برد، همچنین $\mathbf{G}$ دارای الحاقی بصورت $\mathbf{G}^*:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ که $\mathbf{G}^*=\mathbf{P}_{\mathcal{X}}|\mathcal{Y}$ است زیرا

$$\langle \mathbf{G}x,y\rangle=\langle \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}(x),y\rangle=\langle \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x,y\rangle=\langle x,\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}y\rangle=\langle \mathbf{P}_{\mathcal{X}}x,y\rangle=\langle x,\mathbf{P}_{\mathcal{X}}y\rangle=\langle x,\mathbf{G}^*y\rangle$$

اکنون برای مکمل مشترک دو زیرفضای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$، حالتی ساده را بررسی می کنیم که $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ از جهاتی کاملاً غیرمتعامدند. در سراسر مباحث $\mathbf{G}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ گرامی تعریف شده در تعریف ۴.۳.۴ خواهد بود.

لم ۵.۳.۴. *اگر $\mathbf{G}$ وارونپذیر باشد، آنگاه $\mathcal{Z}=\mathcal{Y}^{\perp}$ یک مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است.*

برهان. مطابق تعریف گرامی $\mathbf{G}=\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ و طبق فرض وارونپذیر، و نیز تحدید $\mathbf{P}$ است لذا کراندار است. طبق قضیهٔ ۳.۳.۴ چون $\mathbf{G}$ یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است لذا $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترکی بوده و این مکمل مشترک عبارتست از $\mathcal{Z}=Ker\mathbf{G}=Ker\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}=\mathcal{Y}^{\perp}$. □

به فضای هیلبرت برمی گردیم.

لم ۶.۳.۴. *اگر دو زیر فضای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ از یک فضای هیلبرت دارای یک مکمل مشترک باشند، آنگاه بعد فضاهای $\mathcal{X}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ و $\mathcal{Y}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ برابر می‌شوند، یعنی $codim_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})=codim_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$.*

برهان. طبق قضیهٔ ۳.۳.۴ یک تصویر کراندار $\mathcal{P}$ برروی $\mathcal{Y}$ چنان موجود است که عملگر $\mathcal{G}:=\mathcal{P}|_{\mathcal{X}}$ بازاء $\mathcal{G}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ یک یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ تعریف می کند. لذا $\mathcal{G}$ بطور یکریخت $\mathcal{X}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ را برروی $\mathcal{Y}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ می نگارد. □

باید توجه داشت که شرط لم ۶.۳.۴، شرطی«**کافی**» برای وجود مکمل مشترک بیان می کند، یعنی وجود مکمل مشترک برای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ نتیجه می دهد که

$$codim_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}):=\dim(\mathcal{X}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}))=\dim(\mathcal{Y}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}))=:codim_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$$

متذکر می شویم که برای بدست آوردن شرط کلی تر، شرط دیگری نیز«**لازم**» است و با این شرط«**کافی**» ذکر شده، شرایط برای بررسی شرط کلی در وجود مکمل مشترک فراهم می شود. از برخی جهات فلسفی، شرط بالا لازم و کافی است، البته چنانکه اشتراک $\mathcal{Y}\cap\mathcal{X}$ را با «ε-اشتراک» جایگزین کنیم. این نگاه جدید به مسئله را در فصل بعد بررسی خواهیم نمود. حال برای رسیدن به شرط«**لازم**» فوق الذکر، مقدماتی را ذکر می کنیم.

لم ۷.۳.۴. *اگر $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای یک مکمل مشترک در بستار $\mathcal{Y}\oplus\mathcal{X}$ باشند، آنگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای یک مکمل مشترک در $\mathcal{H}$ هستند.*

برهان. اگر $\mathcal{Z}$ مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ در بستار $\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$ باشد، یعنی $\mathcal{X}+\mathcal{Z}=Clos(\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y})$ و $\mathcal{Y}+\mathcal{Z}=Clos(\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y})$ آنگاه $\mathcal{Z}\oplus(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^{\perp}$ یک مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ در $\mathcal{H}$ است. زیرا

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\supseteq \mathcal{X}\oplus(\mathcal{Z}\oplus(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^{\perp})\\ &= (\mathcal{X}+\mathcal{Z})\oplus(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^{\perp}\\ &= Clos_{\mathcal{H}}(\mathcal{X}+\mathcal{Y})\oplus(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^{\perp}\\ &\supseteq (\mathcal{X}+\mathcal{Y})\oplus(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^{\perp}=\mathcal{H}\end{aligned}$$

بهمین طریق داریم $\mathcal{Y}\oplus(\mathcal{Z}\oplus(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^{\perp})=\mathcal{H}$. □

ملاحظه ۸.۳.۴. *بنا بر لم فوق بدون کاستن از کلّیت مطالب، همیشه می توانیم فرض کنیم که*

$$Clos(\mathcal{X}+\mathcal{Y})=\mathcal{H}$$

اکنون با استفاده از مطالبی که راجع به نرم معادل روی فضا در بخش ۳,۱ گفته شد، قضیهٔ مهم دیگری را بیان می کنیم. نکته ای که در اینجا ذکر آن اهمیت دارد این است که اگر $\mathbf{G}$ گرامی تعریف شدهٔ در ۴.۳.۴ باشد، سپس نرم تولید شده روی $\mathcal{H}$ متناظر با نرم اولیهٔ $\mathcal{X}+\mathcal{Y}\subset\mathcal{H}$ است.

قضیه ۹.۳.۴. *اگر* $\|\mathbf{G}\|<۱$ *و*

$$\dim(\mathcal{X}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}))=\dim(\mathcal{Y}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}))$$

آنگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترکند.

برهان. بنابر لم ۷.۳.۴، بدون کاستن از کلیت می توانیم فرض کنیم که $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ در $\mathcal{H}$ چگال است. تساوی بعدها نتیجه می دهد که یکریختی $G:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ وجود دارد . با ضرب G در یک مقدار کوچک همیشه می توان فرض کرد که $\|G\|<۱$.

طبق گفته های بخش ۴,۱ نرم های تولید شده توسط عملگرهای $\mathcal{A}_G$ و $\mathcal{A}_{\mathbf{G}}$ معادلند و نیز هر دو نسبت به $\mathcal{A}_\circ$ (بمعنی $\mathcal{A}_G$ با $G=\circ$) معادلند. نرم مطابق با$\mathcal{A}_{\mathbf{G}}$ نرم روی $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ موروثی از $\mathcal{H}$ است. این نرم معادل با نرم تولید شده توسط $\mathcal{A}_\circ$ است، بنابراین زیرفضای $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ بسته است و در نتیجه $\mathcal{H}=\mathcal{X}+\mathcal{Y}$.

بنابراین $\mathcal{A}_G$ نرم معادل روی $\mathcal{H}$ را بدست می دهد. توجه کنید که در این نرم مطابق گرامیان $\mathbf{G}$ مساوی G است. از آنجا که $\mathbf{G}$ وارونپذیر است ، لم ۳.۳.۴ نتیجه می دهد که $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای یک مکمل مشترکند. □

تعریف ۱۰.۳.۴. زیرفضای $\mathcal{Y}$ از $\mathcal{X}$ را روی عملگر خطی T **پایا** گوئیم (یا گوئیم $\mathcal{Y}$، تحت T پایاست) اگر $T\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{Y}$. همچنین اگر T عملگری خودالحاق باشد،**جزء اساسی** عملگر T^*T را بصورت $T^*T|_{(KerT)^{\perp}}$ نشان می دهیم.

اگر $\mathbf{G}$ عملگر گرامی باشد، چون $\mathbf{G}^*\mathbf{G}=\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}\ \mathbf{P}_{\mathcal{X}}|\mathcal{Y}$ لذا

$$\circ\leq\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}\ \mathbf{P}_{\mathcal{X}}|\mathcal{Y}\leq I\ \mathbf{P}_{\mathcal{X}}\leq I$$

یعنی $I \leq \mathbf{G}^*\mathbf{G} \leq \circ$، بهمین صورت $\circ \leq \mathbf{G}\mathbf{G}^* \leq I$. بعلاوه $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ نرمال است زیرا

$$(\mathbf{G}^*\mathbf{G})(\mathbf{G}^*\mathbf{G})^* = \mathbf{G}^*\mathbf{G}\mathbf{G}^*\mathbf{G} = (\mathbf{G}^*\mathbf{G})^*(\mathbf{G}^*\mathbf{G})$$

بطریق کاملاً مشابه می توان دید که $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ نیز نرمال است. لذا بنابر توضیحات ذیل تعریف ۴.۵.۳ داریم $\sigma_{(\mathbf{G}^*\mathbf{G})} \subseteq [\circ, ۱]$ و $\sigma_{(\mathbf{G}\mathbf{G}^*)} \subseteq [\circ, ۱]$. (واضح است که طیف جزءاساسی عملگرهای $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ و $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ نیز در $(\circ, ۱]$ واقع می شود). اکنون توجه خود را به قضیهٔ طیفی ۵.۵.۳ معطوف می کنیم. مطابق فرضهای قضیه، چون $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ نرمال است، گیریم $\mathbf{B}$ مجموعهٔ بورل روی $\Omega = [\circ, ۱]$ باشد که شامل $\sigma_{(\mathbf{G}^*\mathbf{G})}$ نیز هست. بنابراین طبق قضیهٔ طیفی، اندازهٔ طیفی یکتای $\mathcal{E}(\cdot)$ روی $\mathbf{B}$ وجود دارد چنانکه

$$\mathbf{G}^*\mathbf{G} = \int_\circ^۱ \lambda d\mathcal{E}(\lambda) \qquad (۱)$$

اینکه ماهیت انتگرالی (۱) چیست مطلبی است که مورد بحث ما در اینجا نمی باشد، بلکه وجود این اندازهٔ طیفی برای ما اهمیت دارد. بنابراین برای عملگرهای طیفی $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ و $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ بترتیب اندازه‌های طیفی $\mathcal{E}(.)$ و $\mathcal{E}^*(.)$ روی $\Omega = [\circ, ۱]$ چنان وجود دارند که $\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}^*(\Omega) = I$ و علاوه براین $\mathcal{E}(.)$ و $\mathcal{E}^*(.)$ عملگرهای تصویری هستند.

حال آماده‌ایم تا برای وجود مکمل مشترک، شرطی را بیان کنیم که کفایت وجود مکمل مشترک در فضا خواهد بود. این شرط مهم که ارتباط بین بعدها و همبعدهاست، را با بیان دو قضیه بصورت شرط لازم و کافی در ذیل عنوان خواهیم کرد.

قسمت عمدهٔ کار ما روی دو موضوع زیر قرار دارد:

- عملگر $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ یا حتی فقط جزء اساسی آن یعنی $\mathbf{G}^*\mathbf{G}|_{(Ker\mathbf{G})^\perp}$. در اینجا تفاوت اساسی در بحث وجود نخواهد داشت زیرا از آنجا که برای $x \in Ker\mathbf{G}$ داریم $\mathbf{G}^*\mathbf{G}x = \circ$ لذا تنها صفرهای $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ را حذف نمودیم.

- بعد دو زیرفضای $\mathcal{X}_\circ$ و $\mathcal{Y}_\circ$ که بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\mathcal{X}_\circ = Ker\mathbf{G} = \{x \in \mathcal{X} | x \perp \mathcal{Y}\}$$
$$\mathcal{Y}_\circ = Ker\mathbf{G}^* = \{y \in \mathcal{Y} | y \perp \mathcal{X}\}$$

لذا با این دو محور، ما هندسهٔ یک جفت زیر فضا را چنان بیان می کنیم که بتوان عملگرهای یکانی معادل را روی آنها تعریف نمود. بنابراین قضیهٔ اساسی زیر را داریم.

قضیه ۱۱.۳.۴. *فرض کنید $\mathcal{E}(.)$ اندازه طیفی عملگر $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ (یا $\mathbf{G}^*\mathbf{G}|_{(Ker\mathbf{G})^\perp}$) باشد. اگر شرط*

$$\dim \mathcal{X}_\circ + \dim \mathcal{E}((\circ, ۱-\varepsilon))\mathcal{X} = \dim \mathcal{Y}_\circ + \dim \mathcal{E}((\circ, ۱-\varepsilon))\mathcal{X} \qquad (*)$$

بازای $\varepsilon > \circ$ی بقدر کافی کوچک برقرار باشد، آنگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترکند.

برهان. ابتدا برای ε موجود قرار دهیم $a = ۱ - \varepsilon$، چون

$$(\circ, a) \cup [a, ۱] = \Omega = (\circ, ۱]$$

و $\mathcal{E}(.)$ جمعی شماراست، لذا

$$\mathcal{E}((\circ, a)) + \mathcal{E}([a, ١]) = I$$

که روی فضای $\mathcal{X}$ نتیجه می دهد

$$\mathcal{E}((\circ, a))\mathcal{X} + \mathcal{E}([a, ١])\mathcal{X} = \mathcal{X}$$

و چون $\mathcal{E}$ عملگر تصویری است و نیز $\mathcal{E}([a, ١]) = I - \mathcal{E}((\circ, a))$ با تعریف مجموعه های

$$\mathcal{X}_١ = \mathcal{E}((\circ, a))\mathcal{X} \quad , \quad \mathcal{X}_٢ = \mathcal{E}([a, ١])\mathcal{X}$$

داریم $\mathcal{X} = \mathcal{X}_١ \oplus \mathcal{X}_٢$. بهمین طریق اگر $\mathcal{E}_*(.)$ اندازهٔ طیفی عملگر $\mathbf{GG}^*$ (یا $\mathbf{GG}^*|_{(Ker\mathbf{G}^*)^\perp}$) باشد که جمعی شمارا روی Ω است، مجموعهٔ $\mathcal{Y}$ را با تعریف

$$\mathcal{Y}_١ = \mathcal{E}_*((\circ, a))\mathcal{Y} \quad , \quad \mathcal{Y}_٢ = \mathcal{E}_*([a, ١])\mathcal{Y}$$

تجزیه نموده و داریم $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_١ \oplus \mathcal{Y}_٢$. بنابراین زیر فضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ بصورت مجموع های متعامد $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_١ \oplus \mathcal{Y}_٢$ و $\mathcal{X} = \mathcal{X}_١ \oplus \mathcal{X}_٢$ تجزیه شده اند.

حال قضیه را در دو مرحله ثابت می کنیم.

(اول). در ابتدا برای سادگی مطلب فرض می کنیم که هسته های $Ker\mathbf{G}$ و $Ker\mathbf{G}^*$ هر دو بدیهی هستند. بنابراین فرض قضیه خودبخود برقرار است و برای هر ε مثبت درست خواهد بود. بعلاوه با این فرض $\mathbf{G}$ و $\mathbf{G}^*$ وارونپذیر خواهند شد و لذا یکریختی می باشند. طبق قضیهٔ تجزیهٔ قطبی، اگر $\mathbf{G} = \mathcal{UR}$ تجزیهٔ قطبی $\mathbf{G}$ باشد که در آن $\mathcal{R} = (\mathbf{G}^*\mathbf{G})^{\frac{١}{٢}}$ و $\mathcal{U} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ عملگری یکانی است، بنابراین داریم

$$\mathbf{GG}^* = \mathcal{UR}(\mathcal{UR})^* = \mathcal{UR}^٢\mathcal{U}^* = \mathcal{U}(\mathbf{G}^*\mathbf{G})\mathcal{U}^*$$

لذا برای اندازه طیفی طبق لم ۶.۵.۳ خواهیم داشت $\mathcal{E}_* = \mathcal{U}\mathcal{E}\mathcal{U}^*$. این نتیجه می دهد که

$$\mathcal{E}_*((\circ, a)) = \mathcal{U}\mathcal{E}((\circ, a))\mathcal{U}^*$$

و

$$\mathcal{E}_*([a, ١]) = \mathcal{U}\mathcal{E}([a, ١])\mathcal{U}^*$$

و از اینجا نتیجه می شود

$$\mathcal{Y}_1 = \mathcal{E}_*((0, a))\mathcal{Y} = \mathcal{U}\mathcal{E}((0, a))\mathcal{U}^*\mathcal{Y} = \mathcal{U}\mathcal{E}((0, a))\mathcal{X} = \mathcal{U}\mathcal{X}_1$$

و

$$\mathcal{Y}_٢ = \mathcal{E}_*([a, ١])\mathcal{Y} = \mathcal{U}\mathcal{E}([a, ١])\mathcal{U}^*\mathcal{Y} = \mathcal{U}\mathcal{E}([a, ١])\mathcal{X} = \mathcal{U}\mathcal{X}_٢$$

در نتیجه $\mathcal{Y}_k = \mathcal{U}\mathcal{X}_k$ که $k = ١, ٢$ و از اینجا بدست می آید $\dim \mathcal{X}_k = \dim \mathcal{Y}_k$.

از آنجا که $\mathcal{X}_k$ها، $\mathbf{G}^*\mathbf{G}-$پایا هستند لذا $R-$پایا بوده و $\mathbf{G}\mathcal{X}_k = \mathcal{URX}_k \subset \mathcal{UX}_k = \mathcal{Y}_k$. بطور مشابه $\mathbf{G}^*\mathcal{Y}_k \subset \mathcal{X}_k$.

حال با فرض $\mathcal{H}_k := Clos(\mathcal{X}_k + \mathcal{Y}_k)$ $(k = ١, ٢)$ می بایست ثابت کنیم که $\mathcal{H}_١ \perp \mathcal{H}_٢$. کافیست نشان دهیم که $\mathcal{X}_١ \perp \mathcal{Y}_٢$ و $\mathcal{X}_٢ \perp \mathcal{Y}_١$. ابتدا $\mathcal{X}_١ \perp \mathcal{Y}_٢$ است زیرا اگر $x \in \mathcal{X}_١$ و $y \in \mathcal{Y}_٢$، می نویسیم

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}y\rangle = \langle \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x, y\rangle = \langle \mathbf{G}x, y\rangle = \circ$$

زیرا $\mathbf{G}x \in \mathcal{Y}_۱ \perp \mathcal{Y}_۲$ است. به همین صورت $\mathcal{Y}_۱ \perp \mathcal{X}_۲$.
اکنون ثابت می کنیم که زوجهای $\mathcal{X}_k$ و $\mathcal{Y}_k$ $(k = ۱, ۲)$ دارای مکمل مشترکند. برای $\mathcal{X}_k$ و $\mathcal{Y}_k$، گرامی مطابق عبارتست از تحدید $\mathbf{G}|\mathcal{X}_k$. پس برای $\mathcal{X}_۲$ و $\mathcal{Y}_۲$ گرامی، وارونپذیر است زیرا $Ker\mathbf{G} = \{۰\}$. برای $\mathcal{X}_۱$ و $\mathcal{Y}_۱$ نیز نرم گرامی کمتر از ۱ است. طبق بالا

$$\dim \mathcal{X}_k = \dim \mathcal{Y}_k$$

از طرفی لم ۵.۳.۴ نشان می دهد که $\mathcal{X}_۲$ و $\mathcal{Y}_۲$ دارای مکمل مشترک و همچنین قضیهٔ ۹.۳.۴ وجود مکمل مشترک را برای زوج $\mathcal{X}_۱$ و $\mathcal{Y}_۱$ بیان می کند.
(دوم). حالت عمومی تر را بررسی می نمائیم که در آن هسته‌های $Ker\mathbf{G}$ یا $Ker\mathbf{G}^*$ غیربدیهی‌اند. دراین حالت $\mathcal{X}_k$ و $\mathcal{Y}_k$ را مانند بالا در نظر می گیریم و سپس به $\mathcal{X}_۱$ و $\mathcal{Y}_۱$ بترتیب زیرفضاهای متعامد $Ker\mathbf{G}$ و $Ker\mathbf{G}^*$ را اضافه می‌کنیم، در نتیجه شرط تعامد همچنان پابرجا باقی می ماند ولی زیرفضاهای $\mathcal{X}_۲$ و $\mathcal{Y}_۲$ را تغییر نمی دهیم فلذا دارای مکمل مشترک خواهند بود. همچنین برای $\mathcal{X}_۱$ و $\mathcal{Y}_۱$ نرم مطابق گرامی، کمتر از ۱ باقی خواهد ماند (زیرا با اضافه نمودن دو زیرفضای متعامد به هر کدام از زیرفضاها، ما دقیقا قطعات صفر را به دامنهٔ گرامی «قدیمی» اضافه کردیم، یعنی نرم کمتر از ۱ باقی می ماند).
حال با توجه به فرض $(*)$ از صورت قضیه، بعدهای $\mathcal{X}_۱$ و $\mathcal{Y}_۱$ «جدید» منطبقند، بالاخره قضیهٔ ۹.۳.۴ برای وجود یک مکمل مشترک برای زوجهای مفروض بکار می رود. پاراگراف بالا را رسماً می نویسیم. گیریم

$$\mathcal{X}^\circ := \mathcal{X} \ominus Ker\mathbf{G}$$
$$\mathcal{Y}^\circ := \mathcal{Y} \ominus Ker\mathbf{G}^*$$

و فرض کنید که $\mathbf{G}_\circ : \mathcal{X}^\circ \to \mathcal{Y}^\circ$ تحدید $\mathbf{G}$ باشد. اگر $\mathcal{X}_k^\circ$ و $\mathcal{Y}_k^\circ$ و $\mathcal{H}_k^\circ$ زیرفضاهای مطابق با $\mathbf{G}_\circ$ بوده و عملگرهای $\mathcal{E}^\circ$ و $\mathcal{E}_*^\circ$ بترتیب اندازه های طیفی برای $\mathbf{G}_\circ$ و $\mathbf{G}_\circ^*$ باشند. بوضوح $\mathcal{X}_۲ = \mathcal{X}_۲^\circ$ و $\mathcal{Y}_۲ = \mathcal{Y}_۲^\circ$ و $\mathcal{X}_۱ = \mathcal{X}_۱^\circ \oplus Ker\mathbf{G}$ و $\mathcal{Y}_۱ = \mathcal{Y}_۱^\circ \oplus Ker\mathbf{G}^*$. از آنجا که

$$Ker\mathbf{G} \perp \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}^\circ$$
$$Ker\mathbf{G}^* \perp \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}^\circ$$

زیر فضاهای $\mathcal{H}_۱$ و $\mathcal{H}_۲$ متعامدند. چون $\mathcal{X}_۲^\circ$ و $\mathcal{Y}_۲^\circ$ بر $\mathcal{X}_۲$ و $\mathcal{Y}_۲$ منطبقند، طبق قسمت (اول) دارای مکمل مشترک هستند. مطابق بحث در حالت هسته های بدیهی داریم:

$$\dim \mathcal{X}_۱^\circ = \dim \mathcal{Y}_۱^\circ = \dim \mathcal{E}^\circ((\circ, a))\mathcal{X}^\circ = \dim \mathcal{E}((\circ, a))\mathcal{X}$$

مطابق فرض قضیه خواهیم داشت

$$\dim \mathcal{X}_۱ = \dim \mathcal{X}_۱^\circ + \dim Ker\mathbf{G} = \dim \mathcal{Y}_۱^\circ + \dim Ker\mathbf{G}^* = \dim \mathcal{Y}_۱$$

حال توجه کنید که

$$\|\mathbf{G}|X_۱\| = \|\mathbf{G}_\circ|X_۱^\circ\| < ۱$$

زیرا عملگرها تنها در قطعات صفر متفاوتند. لذا قضیهٔ ۹.۳.۴ نتیجه می دهد که $\mathcal{X}_۱$ و $\mathcal{Y}_۱$ دارای یک مکمل مشترکند. □

در ذیل عکس قضیه را بررسی خواهیم کرد ولی قبل از آن به یک لم نیاز داریم.

لم ۱۲.۳.۴. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ زیرفضاهای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. اگر یکریختی $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ چنان موجود باشد که $\|x - Ax\| \le q\,\|x\|$ بازای یک $q < ۱$ و $\forall x \in \mathcal{X}$، آنگاه*

$$codim\mathcal{X} = codim\mathcal{Y}$$

برهان. عملگر $A_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ را بصورت $A_{\mathcal{X}}x := \mathbf{P}_{\mathcal{X}}Ax$ تعریف می کنیم که $\mathbf{P}_{\mathcal{X}}$ تصویر متعامد برروی $\mathcal{X}$ است. چون $\mathbf{P}_{\mathcal{X}}$ و A کراندارند پس $A_{\mathcal{X}}$ کراندار است. برای وارونپذیری $A_{\mathcal{X}}$ از آنجا که

$$\|A_{\mathcal{X}}x - x\| = \|\mathbf{P}_{\mathcal{X}}Ax - \mathbf{P}_{\mathcal{X}}x\| = \|\mathbf{P}_{\mathcal{X}}(Ax - x)\| \le \|Ax - x\| \le q\,\|x\|$$

بنابراین $\|A_{\mathcal{X}} - I\| \le q < ۱$ لذا طبق لم ۴.۲.۳، $A_{\mathcal{X}}$ وارونپذیر است. برای $y \in \mathcal{Y}$ داریم $\mathbf{P}_{\mathcal{X}}y = A_{\mathcal{X}}A^{-۱}y$. بنابراین $\mathbf{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ یک یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ تعریف می کند. مطابق لم ۵.۳.۴، $\mathcal{X}^{\perp}$ یک مکمل مشترک برای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است. از آنجا لم ۲.۳.۴ نتیجه می دهد $codim\mathcal{X} = codim\mathcal{Y} = \dim \mathcal{X}^{\perp}$. □

قضیه ۱۳.۳.۴. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ زیرفضاهای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای مکمل مشترکند و $\mathcal{E}(\cdot)$ اندازهٔ طیفی عملگر $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ (یا $\mathbf{G}^*\mathbf{G}|_{(Ker\mathbf{G})^{\perp}}$) باشد. آنگاه بازای εی بقدر کافی کوچک داریم:*

$$\dim \mathcal{X}_{\circ} + \dim \mathcal{E}((\circ, ۱-\varepsilon))\mathcal{X} = \dim \mathcal{Y}_{\circ} + \dim \mathcal{E}((\circ, ۱-\varepsilon))\mathcal{X} \quad (*)$$

برهان. از آنجا که $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترکند، بنابراین طبق قضیهٔ ۳.۳.۴ یک تصویر کراندار $\mathcal{P}$ برروی $\mathcal{Y}$ چنان وجود دارد که $\mathcal{G} := \mathcal{P}|\mathcal{X}$ یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است. اکنون ثابت می کنیم که در شرط $(*)$ چنین εی وجود دارد.

مانند نمادگذاری بخش قبلی، شرط $(*)$ را چنین می‌نویسیم:

$$codim_{\mathcal{X}}\mathcal{X}_۲ := \dim(\mathcal{X} \ominus \mathcal{X}_۲) = \dim(\mathcal{Y} \ominus \mathcal{Y}_۲) =: codim_{\mathcal{Y}}\mathcal{Y}_۲$$

که $codim_{\mathcal{X}}$ برای همبعد در $\mathcal{X}$ بیان می شود. چون $\mathcal{G}$ یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است، پس

$$codim_{\mathcal{X}}\mathcal{X}_۲ = codim_{\mathcal{Y}}\mathcal{G}\mathcal{X}_۲$$

نشان می دهیم که زیرفضاهای $\mathcal{G}\mathcal{X}_۲ = \mathcal{P}\mathcal{X}_۲$ و $\mathcal{Y}_۲ = \mathbf{G}\mathcal{X}_۲ = \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}\mathcal{X}_۲$ همبعدهای یکسانی در $\mathcal{Y}$ دارند. تعریف می کنیم $A : \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}\mathcal{X}_۲ \to \mathcal{P}\mathcal{X}_۲$ که $A = \mathcal{P}(\mathbf{G}|\mathcal{X}_۲)^{-۱}$ و چون $\mathbf{G}$ بطریقی طولپا $\mathcal{X}_۲$ را به $\mathcal{Y}_۲$ می نگارد، پس A خوشتعریف بوده و اگر $x \in \mathcal{X}_۲$ سپس $\|\mathbf{G}x\|^۲ \ge a\|x\|^۲$ که در آن $a = ۱ - \varepsilon$. می نویسیم

$$\|x\|^۲ - \|\mathbf{G}x\|^۲ \le (۱-a)\|x\|^۲ \le \tfrac{۱-a}{a}\|\mathbf{G}x\|^۲ = \tfrac{\varepsilon}{۱-\varepsilon}\|\mathbf{G}x\|^۲$$

پس

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x - \mathcal{P}x\|^۲ &= \|\mathcal{P}\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x - \mathcal{P}x\|^۲ \\ &= \|\mathcal{P}(\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x - x)\|^۲ \\ &\leq \|\mathcal{P}\|^۲\|\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x - x\|^۲ \\ &= \|\mathcal{P}\|^۲(\|x\|^۲ - \|\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x\|^۲) \end{aligned}$$

که قسمت آخر از قضیهٔ ۸.۳.۳ (ث) نتیجه شده و در ادامه داریم

$$\|\mathbf{G}x - \mathcal{P}x\|^۲ = \|\mathcal{P}\|^۲(\|x\|^۲ - \|\mathbf{G}x\|^۲) \leq \tfrac{\varepsilon}{۱-\varepsilon}\|\mathcal{P}\|^۲\|\mathbf{G}x\|^۲$$

برای برقراری فرض لم ۱۲.۳.۴ کافیست بگیریم

$$q = \frac{\varepsilon}{۱-\varepsilon}\|\mathcal{P}\|^۲ < ۱$$

که با در نظر گرفتن $\varepsilon < \frac{۱}{۱+\|\mathcal{P}\|^۲}$ بازای $\varepsilon > ۰$ی کوچکی فرض لم ۱۲.۳.۴ برای زیرفضاهای $\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}\mathcal{X}_۲$ و $\mathcal{P}\mathcal{X}_۲$ در $\mathcal{Y}$ برقرار است، یعنی $codim_{\mathcal{X}}\mathcal{X}_۲ = codim_{\mathcal{Y}}\mathcal{G}\mathcal{X}_۲$. □

اکنون حالت کلی قضایای ۱۱.۳.۴ و ۱۳.۳.۴ را که برای فضاهای هیلبرت حقیقی و مختلط برقرار است بصورت زیر بیان می کنیم.

قضیه ۱۴.۳.۴. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ زیرفضاهای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\mathbf{G}$ گرامی روی $\mathcal{H}$ بوده و $\mathcal{E}(.)$ اندازه طیفی عملگر $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ (یا $\mathbf{G}^*\mathbf{G}|_{(Ker\mathbf{G})^\perp}$) باشد.آنگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای یک مکمل مشترکند اگر و فقط اگر*

$$\dim \mathcal{X}_۰ + \dim \mathcal{E}((۰, ۱-\varepsilon))\mathcal{X} = \dim \mathcal{Y}_۰ + \dim \mathcal{E}((۰, ۱-\varepsilon))\mathcal{X} \quad (*)$$

بازای $\varepsilon > ۰$ی بقدر کافی کوچکی برقرار باشد.

ملاحظه ۱۵.۳.۴. *آنچه درکنار این قضیه میتوان گفت اینست که همیشه میتوان مقدار $\mathcal{E}((۰, ۱-\varepsilon))$ را با $\mathcal{E}((۰, ۱-\varepsilon])$ جایگزین نمود، زیرا همانگونه که در اثبات قضیهٔ ۱۱.۳.۴ دیدیم، بجای افراز $\{(۰, a), [a, ۱]\}$ می توان از افراز $\{(۰, a], (a, ۱]\}$ بهره برد. بعلاوه اگر $\dim \mathcal{X}_۰ = \dim \mathcal{Y}_۰$ باشد، آنگاه مکمل مشترک همیشه وجود خواهد داشت زیرا شرط $(*)$ خودبخود برقرار خواهد بود. از آنجا که $(*)$ برای وجود مکمل مشترک دو زیرفضا شرطی لازم و کافی است، لذا با بررسی این شرط می توان وجود مکمل مشترک یا عدم وجود آنرا بررسی نمود.*

نکتهٔ دیگری که بیان آن خالی از لطف نیست این است که از آنجا که تعریف ضرب داخلی روی فضا مفهومی توپولوژیکی را القا می کند، لذا این مفهوم در مورد مکمل مشترک نیز صادق است. بدین معنی که اگر نرم (ضرب داخلی) در فضا را با نرم معادل (ضرب داخلی) جایگزین کنیم، تغییری در مفهوم مکمل مشترک حاصل نمی شود و این برداشتی از مطالب بخش ۴٫۱ است.

عکس نقیض قضیه در حالتی که فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ تفکیک پذیر باشد، کاربردی بوده و در لم زیر آنرا بیان می کنیم.

لم ۴.۳.۱۶. *اگر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ تفکیک پذیر باشد، زیرفضای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترک نیستند اگر و تنها اگر $\dim\mathcal{X}_\circ \neq \dim\mathcal{Y}_\circ$ و عملگر $(I-\mathbf{G}^*\mathbf{G})|_{(Ker\mathbf{G})^\perp}$ فشرده باشد.*

برهان. در واقع برای فضای $\mathcal{H}$ تفکیک پذیر، اگر مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ موجود نباشد، یعنی برای هر $\varepsilon > \circ$ شرط $(*)$ قضیهٔ ۴.۳.۱۴ برقرار نبوده و این در حالتی درست است که $\dim\mathcal{X}_\circ \neq \dim\mathcal{Y}_\circ$ و $\dim\mathcal{E}((\circ,1-\varepsilon])\mathcal{X}$ برای هر $\varepsilon > \circ$ متناهی باشد. عبارت دوم دقیقاً به این معناست که

$$(I-\mathbf{G}^*\mathbf{G})|_{(Ker\mathbf{G})^\perp}$$

عملگری فشرده باشد. $\square$

این لم تنها حالت ممکن برای وجود نداشتن مکمل مشترک را بازگو کرده و بما امکان می دهد تا مثالهای غیر بدیهی از زیرفضاهای بدون مکمل مشترک را ارائه دهیم.

حال مثالی را عنوان می کنیم که در شرط لازم $codim_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) = codim_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ برای زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ صدق کند و نیز $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای بعد و همبعد مساوی باشند، لیکن مکمل مشترکی نداشته باشند.

۴.۴ مثال غیربدیهی از فضاهای بدون مکمل مشترک

فرض کنید $\mathcal{H} = \ell^2$ فضای دنباله های مربع جمعپذیر بوده و گیریم $\{e_k\}_{k=\circ}^{\infty}$ پایهٔ متعامد یکه استاندارد $\mathcal{H}$ باشد. زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ را بصورت زیر می سازیم. گیریم $y_\circ = e_\circ$ و برای $k \geq 1$،

$$y_k = \cos\tfrac{1}{k}e_{2k-1} + \sin\tfrac{1}{k}e_{2k}$$
$$x_k = \cos\tfrac{1}{k}e_{2k-1} - \sin\tfrac{1}{k}e_{2k}$$

اگر $\mathcal{X} = Span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\mathcal{Y} = Span\{y_i\}_{i=\circ}^{\infty}$ لذا $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ زیرفضاهای با بعد و همبعد مساویند و $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y} = \{\circ\}$ و لذا دارای مکمل مشترک نیستند. در واقع بدیهی است که $\mathbf{G}$ یک اختلال از I است و

$$\circ = \dim Ker\mathbf{G} \neq \dim Ker\mathbf{G}^* = 1$$

خواهد بود.

فصل ۵

توضیح هندسی نتایج

نکتهٔ جالب دربارهٔ نتیجهٔ اصلی این مقاله که قبلاً هم از آن یاد کردیم اینست که وجود یک مکمل مشترک یک شرط توپولوژیکی است، یعنی با تعویض نرم فضا با یک نرم معادل تغییری نمی کند. علاوه بر این تعامد بصورت اسرارآمیزی در نتایج ظاهر شده و نقش مهمی را ایفا می کند. فی الواقع نتیجهٔ کار، حاصل تعامد می باشد. در این بخش یک نسخهٔ هندسی از قضیهٔ ۱۴.۳.۴ ارائه می دهیم که صریحاً شامل تعامد است. منظور از لفظ «صریحاً» در اینجا اینست که هنوز هم به یک نرم فضای هیلبرت احتیاج داریم و نمی دانیم که اگر نرم فضای « هیلبرت » را با یک نرم معادل « باناخ » جایگزین کنیم نتیجه درست خواهد بود یا نه.

تعریف ۱.۰.۵. فرض کنیم $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت و $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ زیرفضاهای $\mathcal{H}$ باشند. همچنین $\epsilon > 0$ مفروض است. منظور از ϵ**-اشتراک** $\mathcal{X}$ عبارتست از مجموعهٔ

$$\mathcal{K}_{\mathcal{X}}^{\epsilon} := \{x \in \mathcal{X} : dist(x, \mathcal{Y}) \leq \epsilon \|x\|\}$$

بهمین صورت ϵ**-اشتراک** $\mathcal{Y}$ قابل تعریف بوده و عبارتست از مجموعهٔ

$$\mathcal{K}_{\mathcal{Y}}^{\epsilon} := \{y \in \mathcal{Y} : dist(y, \mathcal{X}) \leq \epsilon \|y\|\}$$

بدیهی است که $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}^{\epsilon} \subseteq \mathcal{X}$ و $\mathcal{K}_{\mathcal{Y}}^{\epsilon} \subseteq \mathcal{Y}$ است. همانگونه که قبلاً در لم ۶.۳.۴ گفتیم، اگر زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترکی باشند، اشتراک $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ همبعدهای یکسانی در $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارد. قضیهٔ ۱۴.۳.۴ نشان می دهد که تساوی همبعدها برای وجود مکمل مشترک کافی نیست. قضیه ای که خواهیم آورد، فرمولسازی مجددی از قضیهٔ اصلی ۱۴.۳.۴ است و نشان می دهد که اگر اشتراک $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ را با «ϵ-اشتراک» های $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}^{\epsilon}$ و $\mathcal{K}_{\mathcal{Y}}^{\epsilon}$ جایگزین کنیم، سپس تساوی همبعدها لازم و کافی خواهد بود. در این حالت، هرچند بررسی کردن شرط «جدید»، مشکل تر از بررسی شرط $(*)$ قضیهٔ ۱۴.۳.۴ خواهد بود، لیکن ما فکر می کنیم که قضیهٔ ذیل هنوز جالب است، زیرا بیانی هندسی را از نتایج ارائه می دهد. ابتدا ملاحظه کنید که تحت شرایط تعریف ۱.۰.۵، از آنجا که برای فاصلهٔ $x \in \mathcal{X}$ تا $\mathcal{Y}$، طبق قضیهٔ ۴.۳.۳ یک $y \in \mathcal{Y}$ هست که

$$dist(x, \mathcal{Y}) = \|x - y\|$$

و طبق توضیحات ذیل قضیهٔ ۴.۳.۳ داریم $y = \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x$ که از قضیهٔ ۸.۳.۳ (ث) نتیجه می گیریم

$$[dist(x,\mathcal{Y})]^{۲} = \|x\|^{۲} - \|\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x\|^{۲} = \|x\|^{۲} - \|\mathbf{G}x\|^{۲}$$

از طرفی دیگر اگر عملگر $\mathcal{A} = \mathbf{G}^*\mathbf{G} - (۱-\epsilon^{۲})I$ را در نظر بگیریم، می توانیم چنین بنویسیم:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}x, x\rangle &= \langle \mathbf{G}^*\mathbf{G}x - (۱-\epsilon^{۲})Ix, x\rangle \\ &= \langle \mathbf{G}^*\mathbf{G}x, x\rangle - (۱-\epsilon^{۲})\langle Ix, x\rangle \\ &= \langle \mathbf{G}x, \mathbf{G}x\rangle - (۱-\epsilon^{۲})\langle Ix, x\rangle \\ &= \|\mathbf{G}x\|^{۲} - (۱-\epsilon^{۲})\,\|x\|^{۲}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}x, x\rangle \geq ۰ \quad &\Leftrightarrow \quad \|\mathbf{G}x\|^{۲} - (۱-\epsilon^{۲})\,\|x\|^{۲} \geq ۰ \\ &\Leftrightarrow \quad \|x\|^{۲} - \|\mathbf{G}x\|^{۲} \leq \epsilon^{۲}\,\|x\|^{۲} \\ &\Leftrightarrow \quad dist(x,\mathcal{Y}) \leq \epsilon\,\|x\|\end{aligned}$$

بدینصورت مجموعهٔ $\mathcal{K}^{\epsilon}_{\mathcal{X}}$ مخروط بردارهای نامنفی روی $\mathcal{A}$ است، یعنی

$$\mathcal{K}^{\epsilon}_{\mathcal{X}} = \{x \in \mathcal{X} : \langle \mathcal{A}x, x\rangle \geq ۰\}$$

بطور کاملاً مشابه مخروط $\mathcal{K}^{\epsilon}_{\mathcal{Y}}$ مخروط بردارهای نامنفی عملگر $\mathcal{A}_* = \mathbf{G}\mathbf{G}^* - (۱-\epsilon^{۲})I$ است و

$$\mathcal{K}^{\epsilon}_{\mathcal{Y}} = \{y \in \mathcal{Y} : \langle \mathcal{A}_*y, y\rangle \geq ۰\}$$

تعریف ۲.۰.۵. فرض کنیم $\mathcal{K}$ زیرفضای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. «بعد خطی پائینی» روی $\mathcal{K}$ را چنین تعریف می کنیم:

$$\sup\{\dim \mathcal{L} : \text{زیر فضای خطی } \mathcal{K} \text{ است } \mathcal{L}\}$$

به همین نحو «همبعد خطی بالائی» روی $\mathcal{K}$ را بصورت زیر تعریف می نمائیم:

$$\inf\{codim\mathcal{L} : \text{زیر فضای خطی } \mathcal{K} \text{ است } \mathcal{L}\}$$

اگر خواننده با گرفتن sup و inf روی اعداد اصلی راحت نیست، نگران نباشد زیرا در این حالت، زیرفضاهای با بعد حداکثر و بعد حداقل همیشه وجود دارند.

لم ۳.۰.۵. *فرض کنید $\mathcal{A}$ عملگر خودالحاق کراندار در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ مخروط بردارهای نامنفی $\mathcal{A}$ باشد یعنی $\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{H} : \langle \mathcal{A}x, x\rangle \geq ۰\}$. همچنین فرض کنید که $\sigma_{\mathcal{A}}$ و نیز $\mathcal{E}$ اندازهٔ طیفی عملگر $\mathcal{A}$ بوده و*

$$\mathcal{H}_- := \mathcal{E}((-\infty, ۰)) \text{ و } \mathcal{H}_+ := \mathcal{E}([۰, \infty))$$

باشد. آنگاه همبعد خطی بالائی مخروط $\mathcal{K}$ دقیقاً عبارتست از $codim\mathcal{H}_+ = \dim \mathcal{H}_-$.

برهان. یک زیرفضای (بستهٔ) $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}$ را در نظر می گیریم. فرض کنید $\mathbf{P}$ تصویر متعامد برروی $\mathcal{H}_+$ باشد و $\mathcal{Y} = Clos\mathbf{P}\mathcal{X}$. توسط ساختار $\mathcal{Y}$ مجموعهٔ $\mathcal{Y}_\circ = \{y \in \mathcal{Y} : y \perp \mathcal{X}\} = \{\circ\}$ از آنجا که $\mathcal{H}_+ \ominus \mathcal{Y} \perp \mathcal{X}$، هر بردار $x \in \mathcal{X}$ عمود بر $\mathcal{Y}$، بطور اتوماتیک عمود بر $\mathcal{H}_+$ خواهد شد. اما از آنجا که $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}$، داریم $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}_- = \{\circ\}$ و لذا $\mathcal{X}_\circ = \{x \in \mathcal{X} : x \perp \mathcal{Y}\} = \{\circ\}$. بنابراین شرط $(*)$ قضیهٔ ۱۴.۳.۴ صادق است (نکتهٔ ۱۵.۳.۴ ذیل قضیه را ببینید) یعنی $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترکند مثلاً $\mathcal{Z}$. از لم ۲.۳.۴ داریم که $codim\mathcal{X} = codim\mathcal{Y} = \dim \mathcal{Z}$ و چون $\mathcal{Y} \subset \mathcal{H}_+$ داریم $codim\mathcal{Y} \geq codim\mathcal{H}_+$. بنابراین $\mathcal{H}_+$ دارای کوچکترین همبعد بین همهٔ زیرفضاهای $\mathcal{K}$ است. □

قضیه ۴.۰.۵. *زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ از یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای مکمل مشترکند، اگر و تنها اگر برای یک $\epsilon > \circ$ (کوچک) همبعدهای خطی بالای مخروطهای $\mathcal{K}^\epsilon_\mathcal{X}$ در $\mathcal{X}$ و $\mathcal{K}^\epsilon_\mathcal{Y}$ در $\mathcal{Y}$ منطبق باشند.*

برهان. برای عملگر $\mathcal{A} = \mathbf{G}^*\mathbf{G} - (\text{۱} - \epsilon^\text{۲})I$ تعریف شده در بالا فرض کنیم $\mathcal{H}_- := \mathcal{E}((\circ, \text{۱} - \epsilon^\text{۲}))$ و $\mathcal{H}_+ := \mathcal{E}([\text{۱} - \epsilon^\text{۲}, \text{۱}])$ بوده و نیز بطور مشابه برای عملگر $\mathcal{A}_* = \mathbf{G}\mathbf{G}^* - (\text{۱} - \epsilon^\text{۲})I$ فرض کنیم $\mathcal{H}_- := \mathcal{E}_*((\circ, \text{۱} - \epsilon^\text{۲}))$ و $\mathcal{H}_+ := \mathcal{E}_*([\text{۱} - \epsilon^\text{۲}, \text{۱}])$ باشد. بنابراین همبعدهای خطی بالای مخروطهای $\mathcal{K}^\epsilon_\mathcal{X}$ و $\mathcal{K}^\epsilon_\mathcal{Y}$ بترتیب مساوی اند با

$$\dim \mathcal{E}([\circ, \text{۱} - \epsilon^\text{۲}]) = \dim Ker\mathbf{G} + \dim \mathcal{E}((\circ, \text{۱} - \epsilon^\text{۲}))$$

و

$$\dim \mathcal{E}_*([\circ, \text{۱} - \epsilon^\text{۲}]) = \dim Ker\mathbf{G}^* + \dim \mathcal{E}_*((\circ, \text{۱} - \epsilon^\text{۲}))$$

بنابر آنچه در قضیهٔ ۱۱.۳.۴ گفته شد، چون $\mathcal{E}_* = \mathcal{U}\mathcal{E}\mathcal{U}^*$. لذا $\mathcal{E}$ و $\mathcal{E}_*$ یکانی معادلند پس یکریخت بوده و داریم $\dim \mathcal{E}_*([\circ, \text{۱} - \epsilon^\text{۲})] = \dim \mathcal{E}((\circ, \text{۱} - \epsilon^\text{۲}))$. می بینیم که این شرط، دقیقاً شرط $(*)$ از قضیهٔ ۱۴.۳.۴ است (که $\epsilon^\text{۲}$ را جایگزین ϵ کردیم). □

در خاتمه بحث قابل ذکر خواهد بود اگر که بگوئیم اینکه آیا بتوان برای سه زیرفضا از یک فضای هیلبرت ، یک مکمل مشترک پیدا نمود خود مسئله‌ای است درخور تامل، و همانگونه که ذکر کردیم مسئله یافتن مکمل مشترک برای دو زیرفضا، مسئله‌ای است که وابسته به توپولوژی حاصل از نرم فضا نیست، ولی اینکه آیا بتوان روی نرم های دیگر فضای باناخ نیز این مسئله را عنوان نمود خود بحثی دیگر است، علاوه بر این ما هیچ حدسی در مورد اینکه سه زیرفضا مکمل مشترک داشته باشند نداریم.

مراجع

[1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., *Linear Operators, Part I: General Theory, Part II: Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space*, John Wiley and Sons, New York, 1957.

[2] Hewitt, E. and Stromberg, K., *Real and Abstract Analysis: a Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable*, 2nd Edition, Springer, New York, 1969.

[3] Mlak, W., *Hilbert Spaces and Operators Theory*, PWN-Polish Scientific Publishers-, Warszawa, 1991.

[4] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley - Sons, 1978.

[5] Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis with Applications*, Springer Verlag, 1985.

[6] Lax, P. D., *Functional Analysis*, John Wiley - Sons, New York, 2002.

[7] Royden, H. L., *Real Analysis*, Third Edition, Eighth Reprint, Prentice-Hall of India, New Delhi, 2002.

[8] Bartle, R., *The Elements of Integration*, John Wiley - Sons, New York, 1966.

[9] Birman, M. S. and Solomjak, M. Z., *Specral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holand, 1987.

[۱۰] پ. هالموس، *فضاهای برداری متناهی- بعد*، ترجمه کریم صدیقی، دانشگاه شیراز، ۱۳۷۱.

[۱۱] ب. ت. سیمز، *مبانی توپولوژی*، ترجمهٔ جعفر زعفرانی، دانشگاه اصفهان، ۱۳۷۲.

فصل ۶

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

اعدادحقیقی توسعه یافته	Extended real numbers
اندازه	Measure
اندازه‌پذیر	Measurable
اندازه شمارش پذیر	Counting measure
اندازهٔ طیفی	Spectral measure
اندازهٔ نیم–طیفی	Semi-spectral measure
بعد	Dimension
بعد خطی بالائی	Upper linear dimension
بعد خطی پائینی	Lower linear dimension
بستار	Closure
پایهٔ شودر	Shauder basis
پایهٔ همل	Hamel base
پایا	Invariant
تجزیهٔ متعامد	Orthogonal decomposition
تساوی متوازی الاضلاع	Parallelogram equality
تصویر کج	Skew projection
تصویر متعامد	Orthogonal projection
تعامد	Orthogonality
جبر بورل	Borel algebra
جزء اساسی	Essential part
جمع مستقیم	Direct sum
جمعی شمارا	Countably Additive
چگال	Dense
خودتوان	Idempotent
زیرفضاهای مکمل	Complementary subspaces
ضرب داخلی	Inner product

طولپائی	Isometric
طیف	Spectrum
عملگر	Operator
عملگر نرمال	Normal operator
عملگر همانی	Identity operator
عملگر تصویری	Projection operator
عملگر الحاقی	Adjoint operator
عملگر یکانی	Unitary operator
فضای هیلبرت	Hilbert space
فضای باناخ	Banach space
فشرده نسبی	Relatively compact
قضیه نگاشت طیفی	Spectral mapping theorem
قضیهٔ رسته ای بیر	Bare category theorem
قضیهٔ نگاشت بسته	Closed graph theorem
قضیهٔ تجزیهٔ طیفی	Polar decomposition theorem
قطر	Diameter
کراندار	Bounded
گرامی	Gramiann
گراسمانیان	Grassmaniann
گوه	Wedge
محدب	Convex
مخروط	Cone
σ-متناهی	σ-finite
متعامد	Ortogonal
متریک	Metric
مجموعهٔ کلی	Total set
مجموعهٔ بورل	Borel set
مجموعهٔ متعامد یکه کلی	Total orthogonal set
مزدوج مختلط	Complex conjugate
مکمل مشترک	Common complement
میدان	Field
نامساوی شوارتز	Shewartz inequality
نامساوی مثلثی	Triangle inequality
نرم	Norm
وارونپذیر	Invertible
همگرای یکنواخت	Uniformly convergence
همبعد	Codimension
یکانی معادل	Unitary equivalent
یکریختی	Isomorphism

نمایه

ABSTRACT

Last name: *Nosrati*	**First name:** *Shahpour*
Title: Common Complement of Two Subspaces of a Hilbert Space	
Supervisor: *Dr Abdolmohammad Aminpour* **Advisor:** *Dr Abdoljabbar Badiozzaman*	
Education grade: *M.Sc*	**Course:** *Pure Mathematics*
Faculty of Mathematical Science and Computer، Chamran University of Ahvaz	
Keywords: *Common Complement، Gramian، Upper Linear Codimension، Lower Linear Dimension*	

Abstract: In this paper we find a necessary and sufficient condition for two closed subspaces، X and Y of a Hilbert space H to have a common complement،i.e. a subspace Z having trivial intersection with X and Y and such that H=X+Z=Y+Z. Unlike the finite-dimensional case the condition is significantly more subtle than simple equalities of dimensions and codimensions، and non-trivial examples of subspaces without a common complement are possible. Paper was written by Michael Lauzon and Sergei Treil in *Journal of Functional Analysis ۲۱۲ (۲۰۰۴) ۵۰۰-۵۱۲*، and published by Elsevier Inc.

Faculty of Mathematical Science and Computer

Submitted in Partial Fulfillment of
the Requirements for the Degree of

M.Sc. Student in Pure Math.(Analysis)

Title of Paper

Common Complement of Two Subspaces of a Hilbert Space

by
Shahpour Nosrati

Under Supervision of
Dr Abdolmohammad Aminpour

Under Advisor of
Dr Abdoljabbar Badiozzaman

December ۲۰۰۵