فصل ۱
معادلات مرتبه اول

نگارش: تابستان ۱۳۸۹
آخرین ویرایش: ۲۹ مهر ۱۳۹۸

در این فصل به حل معادلات مرتبه اول می پردازیم که به شکل کلی $f(x,y,y') = \circ$ هستند. اگرچه در بسیاری از موارد می توان آنها را به شکل $y' = f(x,y)$ نوشت ولی کمک چندانی به حل آنها نمی کند. به هر حال، بطور معمول درجه معادله را یک در نظر گرفته و توان x و y دلخواه خواهند بود و مسلماً جواب عمومی در این معادلات تنها یک ثابت C حقیقی خواهد داشت. روشهای حل ما مبتنی بر روشهای جبری بوده و جوابها اغلب سرراست هستند و گاهی نیز ناگزیریم تا جوابها را بصورت ضمنی بپذیریم. مانند فصل قبل در اکثر جاها بجای y' از نماد لایب نیتز $\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ استفاده می کنیم.

۱.۱ معادله تفکیک پذیر

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول را تفکیک پذیر گوئیم اگر بتوان آنرا به شکل

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad , \quad f(x)\,\mathrm{dx} = g(y)\,\mathrm{dy}$$

نوشت که با انتگرالگیری از طرفین، حاصل بصورت

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \int g(y)\,\mathrm{dy} + C$$

بدست می آید و در آن C ثابت دلخواهی است. در این روش که گاهی حل معادله با توابع مقدماتی نیز نامیده می شود، دسته بندی متغیرها در حالتی جداشدنی قرارگرفته چنانکه بایستی x و وابستگان آن در یک طرف و y و وابستگان آن در طرف دیگر قرار بگیرند. جواب این نوع معادلات، اغلب بصورت توابع مقدماتی [۱] است. به مثالهای زیر توجه کنید.

[۱] توابع مقدماتی عبارتند از

$$\log_a x, \ln x, a^x, e^x, ^\circ(D), \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \arcsin x, , \arccos x, \arctan x$$
$$\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x, \mathrm{arcsinh}\, x, \mathrm{arcosh}\, x, \mathrm{arctanh}\, x, \mathrm{arccoth}\, x, \mathrm{sinc}\, x$$

مثال ۱.۱.۱. حل معادلهٔ دیفرانسیل $e^x\,\mathrm{dx} - y\,\mathrm{dy} = ۰$ با مقدار اولیهٔ $y(۰) = ۲$.
حل.

$$\begin{aligned}
e^x\,\mathrm{dx} &= y\,\mathrm{dy}\\
\int e^x\,\mathrm{dx} &= \int y\,\mathrm{dy} + C\\
e^x &= \frac{۱}{۲}y^۲ + C
\end{aligned}$$

بازای مقدار اولیهٔ $y(۰) = ۲$ چون $e^۰ = ۲ + C$ لذا $C = -۱$ بوده و $e^x = \frac{۱}{۲}y^۲ - ۱$ جواب خصوصی معادله است. □

مثال ۲.۱.۱. معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = y - y^۲$ با مقدار اولیهٔ $y(۰) = \frac{۱}{۲}$ را حل نمائید.
حل.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dy}}{y - y^۲} &= \mathrm{dx}\\
\int \frac{\mathrm{dy}}{y(۱ - y)} &= \int \mathrm{dx} + C\\
\ln \frac{y}{۱ - y} &= x + C\\
y(x) &= \frac{ke^x}{۱ + ke^x} \quad , \quad k = e^C > ۰
\end{aligned}$$

که $۰ < y < ۱$. بازای $y(۰) = \frac{۱}{۲}$ داریم $k = ۱$ و $y(x) = \frac{e^x}{۱ + e^x}$ جواب خصوصی معادله است. □

مثال ۳.۱.۱. حل معادلهٔ $۲yy' = e^x$.
حل.

$$\begin{aligned}
۲yy' &= e^x\\
۲y\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} &= e^x\\
۲y\,\mathrm{dy} &= e^x\,\mathrm{dx}\\
\int ۲y\,\mathrm{dy} &= \int e^x\,\mathrm{dx} + C\\
y^۲ &= e^x + C
\end{aligned}$$

و جواب عمومی معادله $y^۲ = e^x + C$ خواهد بود. □

مثال ۴.۱.۱. مطلوبست حل معادلهٔ $y' = x^۳y^۵$.

حل.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^۳y^۵\\ dy &= x^۳y^۵\,dx\\ \frac{dy}{y^۵} &= x^۳\,dx\\ \int\frac{dy}{y^۵} &= \int x^۳\,dx + C\\ \frac{-۱}{۴y^۴} &= \frac{x^۴}{۴} + C\end{aligned}$$

و جواب عمومی معادله عبارتست از $x^۴y^۴ + ۴Cy^۴ + ۱ = ۰$ با $C < ۰$. □

مثال ۵.۱.۱. حل معادلهٔ $y(t^۲ + ۱)\,dt + (t^۳ - ۳t)\,dy = ۰$.

حل. اگر عوامل طرفین را بر $y(t^۳ - ۳t)$ تقسیم کنیم سپس:

$$\frac{t^۲+۱}{t^۳-۳t}\,dt + \frac{۱}{y}\,dy = ۰$$

$$\int\frac{t^۲+۱}{t^۳-۳t}\,dt + \int\frac{۱}{y}\,dy = C$$

$$\int\frac{t^۲+۱}{t(t-\sqrt{۳})(t+\sqrt{۳})}\,dt + \int\frac{۱}{y}\,dy = C$$

$$\int\left(\frac{-\frac{۱}{۳}}{t} + \frac{\frac{۲}{۳}}{t-\sqrt{۳}} + \frac{\frac{۲}{۳}}{t+\sqrt{۳}}\right)dt + \int\frac{۱}{y}\,dy = C$$

$$-\frac{۱}{۳}\ln|t| + \frac{۲}{۳}\ln|t-\sqrt{۳}| + \frac{۲}{۳}\ln|t+\sqrt{۳}| + \ln|y| = \ln C_۱ \;\;,\;\; C = \ln C_۱$$

$$(t^۲-۳)^۲y^۳ = tC_۲$$

که در آن $C_۲ = \pm e^{۳C_۱}$ بوده و جواب بازای $t > \sqrt{۳}$ برقرار است. انتخاب ثابت $\ln C_۱$ بجای C اختیاری است و تاثیری روی جواب ندارد. □

مثال ۶.۱.۱. معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = y^{۲} + ۲y + ۲$ را حل نمائید.

حل. با تفکیک متغیرها براحتی می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y^{۲}+۲y+۲} &= dx \\
\int \frac{dy}{y^{۲}+۲y+۲} &= \int dx + C \\
\arctan(y+۱) &= x + C \\
y &= \tan(x+C) - ۱
\end{aligned}$$

□

مثال ۷.۱.۱. حل معادلهٔ دیفرانسیل $۹x^{۸}\,dx + \cos y\,dy = ۰$ با مقدار اولیهٔ $y(۱) = \pi$.

حل.

$$\begin{aligned}
۹x^{۸}\,dx &= -\cos y\,dy \\
\int_{۱}^{x} ۹x^{۸}\,dx &= \int_{\pi}^{y} -\cos y\,dy \\
x^{۹}\Big|_{۱}^{x} &= -\sin y\Big|_{\pi}^{y} \\
x^{۹} - ۱ &= -\sin y \\
y &= \arcsin(-x^{۹}+۱)
\end{aligned}$$

این روش حل، بطور مستقیم منجر به یافتن جواب خصوصی می شود (مانند مثال۶.۱.۱). □

تمرین ۲.۱. .

۱. معادلات تفکیک پذیر زیر را حل کرده و جواب عمومی آنها را بیابید. در مواردی که مقدار اولیه داده شده، جواب خصوصی را نیز پیدا کنید.

$$\begin{array}{llll}
(a) & \frac{-۱}{x^{۳}}\,dx = dt & ,\ (b) & (t+۲e^{t})\,dy + y(۱+۲e^{t})\,dt = ۰ \\
(c) & y' = -۴y & ,\ (d) & (۲-x)\,dy + (۵+y)\,dx = ۰ \\
(e) & y' = y^{۲}x + y^{۲} & ,\ (f) & y' = -۳yt^{۲} \\
(g) & xy' = ۳y & ,\ (h) & (x^{۲}+۱)(y+۱)\,dx = (x^{۳}-۳x)\,dy \\
(i) & y' = ye^{x} & ,\ (j) & t\,dy - \sqrt{۱-y^{۲}}\,dt = ۰ \\
(k) & y' = x^{۴}y^{۳} & ,\ (\ell) & (۴-x)\,dy + (۱+y^{۲})\,dx = ۰ \\
(m) & y' = x^{۲}(۱+y^{۲}) & ,\ (n) & y'\tan x + \cot y = ۰ \quad ; \quad y(۰) = ۰ \\
(o) & (۱+x)y' = -۳y & ,\ (p) & y' = x\cos y \qquad\qquad ; \quad x(\frac{\pi}{۲}) = ۱ \\
(q) & y' + \cos x\, e^{y} = ۰ & ,\ (r) & y' + y = y(xe^{x^{۲}}+۱) \quad ; \quad y(۰) = ۱
\end{array}$$

۲. معادله دیفرانسیل تمام سهمی‌هائی را بدست آورید که محور تقارن آنها محور طولهاست. سپس آنرا حل کنید.

۳.۱ معادلات همگن (متجانس)

تابع $f(x,y) = ۰$ را روی بازهٔ حقیقی I همگن از درجهٔ α گوئیم اگر برای هر tای که $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ داشته باشیم $tx, ty \in I$ و $f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y)$. در زیر توابعی همگن بترتیب از درجهٔ ۱ و ۰/۵ و ۰ آمده است:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{۳x^۲+۵y^۲}{۴x} \\
&\Rightarrow \quad f(tx,ty) = \frac{۳(tx)^۲+۵(ty)^۲}{۴(tx)} = \frac{t^۲(۳x^۲+۵y^۲)}{۴tx} = tf(x,y) \Rightarrow \alpha = ۱ \\
f(x,y) &= \sqrt{x-y} \\
&\Rightarrow \quad f(tx,ty) = \sqrt{tx-ty} = \sqrt{t}\,\sqrt{x-y} = t^{\frac{۱}{۲}} f(x,y) \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۲} \\
f(x,y) &= \frac{۲x^۲y-y^۳}{xy^۲} \\
&\Rightarrow \quad f(tx,ty) = \frac{۲(tx)^۲(ty)-(ty)^۳}{(tx)(ty)^۲} = \frac{t^۳(۲x^۲y-y^۳)}{t^۳(xy^۲)} = f(x,y) \Rightarrow \alpha = ۰
\end{aligned}
$$

در حالت خاص معادله دیفرانسیلی که طرف راست آن تابع $f(x,y)$ همگن از درجهٔ صفر است، یعنی در شرط $f(tx,ty) = f(x,y)$، صدق کند را می توان حل نمود. برای حل معادلات به روش همگن از درجهٔ صفر، ابتدا باید شکل معادله را بصورت $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = f(x,y)$ یا $y' = f(x,y)$ بنویسیم و در مورد همگن بودن $f(x,y)$ تحقیق نمائیم. سپس با تغییر متغیر $y = ux$ و مشتق آن $y' = u'x + u$ معادله را بر حسب u و x بشکل زیر ساده کنیم:

$$u'x + u = f(x,y) = f(\frac{۱}{x}x, \frac{۱}{x}y) = f(۱, \frac{y}{x}) = f(۱,u)$$

پس از حل معادله u بر حسب x، متغیر را با جایگزینی $u = \frac{y}{x}$ به متغیر اولیه برمی گردانیم.

مثال ۱.۳.۱. مطلوبست حل معادلهٔ

$$y' = \frac{۲y^۴+x^۴}{xy^۳}$$

حل. شرط همگن بودن را برای تابع سمت راست بررسی می کنیم:

$$f(tx,ty) = \frac{۲(ty)^۴+(tx)^۴}{(tx)(ty)^۳} = \frac{t^۴(۲y^۴+x^۴)}{t^۴(xy^۳)} = \frac{۲y^۴+x^۴}{xy^۳} = f(x,y)$$

بنابراین معادله همگن از درجهٔ صفر است. با جانشینی $y=ux$ و $y'=u'x+u$ داریم:

$$\begin{aligned}
u'x+u &= \frac{۲(ux)^۴+x^۴}{x(ux)^۳}\\
u'x+u &= \frac{x^۴(۲u^۴+۱)}{x^۴u^۳}\\
u'x &= \frac{۲u^۴+۱}{u^۳}-u\\
u'x &= \frac{u^۴+۱}{u^۳}\\
\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}x &= \frac{u^۴+۱}{u^۳}\\
\int\frac{u^۳}{u^۴+۱}\,\mathrm{du} &= \int\frac{\mathrm{dx}}{x}\\
\frac{۱}{۴}\ln|u^۴+۱| &= \ln|x|+\ln C\ \ ,\ \ x>۰\\
\sqrt[۴]{u^۴+۱} &= C|x|\\
\sqrt[۴]{\left(\frac{y}{x}\right)^۴+۱} &= C|x|\\
y^۴ &= kx^۸-x^۴\ \ ,\ \ x>۰\ \ ,\ \ k=C^۴\\
y &= x\sqrt[۴]{kx^۴-۱}
\end{aligned}$$

که برای $x>k^{-۴}$ تعریف شده است. □

مثال ۲.۳.۱. مطلوبست حل معادلهٔ $x\,\mathrm{dy}-y\,\mathrm{dx}-\sqrt{x^۲-y^۲}\,\mathrm{dx}=۰$

حل. می نویسیم $x\,\mathrm{dy}=(y+\sqrt{x^۲-y^۲})\,\mathrm{dx}$ لذا $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{y+\sqrt{x^۲-y^۲}}{x}$ شرط همگن بودن را بررسی می کنیم:

$$f(tx,ty)=\frac{ty+\sqrt{t^۲x^۲-t^۲y^۲}}{tx}=\frac{y+\sqrt{x^۲-y^۲}}{x}=f(x,y)$$

بنابراین معادله همگن از درجهٔ صفر است. با جانشینی $y = ux$ و $y' = u'x + u$ می نویسیم:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{y + \sqrt{x^۲ - y^۲}}{x} \\
u'x + u &= \frac{ux + \sqrt{x^۲ - (ux)^۲}}{x} \\
u'x + u &= u + \sqrt{۱ - u^۲} \\
\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} x &= \sqrt{۱ - u^۲} \\
\frac{\mathrm{du}}{\sqrt{۱ - u^۲}} &= \frac{\mathrm{dx}}{x} \\
\int \frac{\mathrm{du}}{\sqrt{۱ - u^۲}} &= \int \frac{\mathrm{dx}}{x} + C \\
\arcsin u &= \ln x + C \quad , \quad x > ۰ \\
y &= x \sin(\ln x + C)
\end{aligned}$$

که برای $x > ۰$ تعریف شده است. □

مطلب ۱.۱

در معادلاتی به شکل $M(x,y)\,\mathrm{dx} + N(x,y)\,\mathrm{dy} = ۰$ که $M(x,y)$ و $N(x,y)$ هر دو توابعی همگن از درجه α هستند می توان با تشکیل نسبت

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$

آنرا به معادله‌ای همگن از درجه صفر تبدیل نمود.[آ]

[آ] در این حالت، توابع M و N را توابع متجانس گوئیم.

از طرفی نیز با تغییر متغیر $y = ux$ و دیفرانسیل آن $\mathrm{dy} = x\,\mathrm{du} + u\,\mathrm{dx}$ و جایگذاری در معادلهٔ اولیه داریم:

$$\begin{aligned}
&M(x,ux)\,\mathrm{dx} + N(x,ux)(x\,\mathrm{du} + u\,\mathrm{dx}) = ۰ \\
&x^\alpha M(۱,u)\,\mathrm{dx} + x^\alpha N(۱,u)(x\,\mathrm{du} + u\,\mathrm{dx}) = ۰ \\
&(M(۱,u) + uN(۱,u))\ \mathrm{dx} + xN(۱,u)\,\mathrm{du} = ۰ \\
&-\ln x = \int \frac{N(۱,u)}{M(۱,u) + uN(۱,u)}\,\mathrm{du} + C
\end{aligned}$$

تمرین ۴.۱. .

۱. معادلات همگن زیر را حل نمائید.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & x+y=xy' & ,\ (b) & (x^{۲}+y^{۲})\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y=۰ \\
(c) & (x^{۲}-y^{۲})\,\mathrm{d}x+۲xy\,\mathrm{d}y=۰ & ,\ (d) & (۲ye^{\frac{y}{x}}-x)y'+(۲x+y)=۰ \\
(e) & (x-۲y)\,\mathrm{d}x+(۲x+y)\,\mathrm{d}y=۰ & ,\ (f) & (xy+y^{۲})y'+(xy+x^{۲})=۰ \\
(g) & xy'=y+x\sin\frac{y}{x} & ,\ (h) & xy'=y(\ln x-\ln y)+y
\end{array}
$$

۲. نشان دهید که اگر در معادلهٔ مرتبه اول $y'=f(x,y)$ تابع $f(x,y)$ همگن از درجه صفر باشد با تغییر متغیر $y=ux$ می توان آنرا تفکیک نموده و بنویسیم:

$$\ln|x|=\int\frac{\mathrm{d}u}{f(۱,u)-u}$$

۵.۱ تبدیلات متفرقه

مانند حل معادلات همگن که تبدیل $y=ux$ بکار گرفته می شود، برخی معادلات نیز با جانشینی برخی عبارات مفید و تبدیلات سودمند ساده تر خواهند شد.

(الف) معادلهٔ دیفرانسیل به شکل

$$y'=g(ax+by+c)\ \ ,\ \ b\neq ۰$$

به کمک تبدیل $u=ax+by+c$ به معادلهٔ تفکیک پذیر $u'=a+bg(u)$ تبدیل می شود.

مثال ۱.۵.۱. حل معادلهٔ $y'=(۴x-y+۱)^{۲}$ با مقدار اولیهٔ $y(۰)=-۳$.

حل. با فرض $u=۴x-y+۱$ و با مشتقگیری از طرفین و سپس جایگذاری داریم:

$$
\begin{aligned}
u' &= ۴-y' \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= ۴-u^{۲}\ ,\ \ u(۰)=۴ \\
\frac{\mathrm{d}u}{۴-u^{۲}} &= \mathrm{d}x \\
\int\frac{\mathrm{d}u}{۴-u^{۲}} &= \int\mathrm{d}x+C \\
\frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{u+۲}{u-۲}\right| &= x+C\ ,\ \ u(۰)=۴ \\
u(۰)=۴ &\Rightarrow C=\frac{۱}{۴}\ln ۳ \\
y &= ۴x-۱-\frac{۴}{۳e^{۴x}-۱}
\end{aligned}
$$

□

(ب) برای معادلهٔ دیفرانسیل به شکل

$$y'=g\Big(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\Big)\ \ ,\ \ a,b,c,a',b',c'\in\mathbb{R}\ \ ,\ \ b,b'\neq ۰$$

که حالت کلی تر (الف) است و آنرا معادلهٔ ژاکوبی نامند، اگر (s, t) جواب دستگاه

$$\begin{cases} ax + by + c = \circ, \\ a'x + b'y + c' = \circ. \end{cases}$$

باشد [۲] پس با تغییر متغیرهای $x = u + s$ و $y = v + t$ معادله ژاکوبی به معادلهٔ همگن با متغیرهای u و v تبدیل می شود. اما اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \circ$ باشد، چون $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$ است، جانشین مناسب جهت حل معادلهٔ دیفرانسیل، $u = ax + by$ خواهد بود که به معادله‌ای تفکیک پذیر مبدل می گردد.

مثال ۱.۵.۲. حل معادلهٔ

$$(x + y - ۳)\,\mathrm{d}x - (x - y + ۱)\,\mathrm{d}y = \circ$$

حل. می نویسیم $y' = \frac{x + y - ۳}{x - y + ۱}$ و دستگاه $\begin{cases} x + y - ۳ = \circ, \\ x - y + ۱ = \circ. \end{cases}$ دارای جواب است زیرا $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix} = -۲ \neq \circ$ با حل دستگاه و یافتن جواب $(۱, ۲)$ جانشینی های $x = u + ۱$ و $y = v + ۲$ را در نظر گرفته و با دیفرانسیل گیری و جایگذاری داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x + y - ۳}{x - y + ۱} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} &= \frac{u + v}{u - v} \\ z'u + z &= \frac{۱ + z}{۱ - z} \quad , \quad v = zu \text{ معادله همگن با جانشین} \\ \int \frac{۱ - z}{۱ + z^{۲}}\,\mathrm{d}z &= \int \frac{۱}{u}\,\mathrm{d}u + C \\ \arctan z - \frac{۱}{۲}\ln(۱ + z^{۲}) &= \ln|u| + \ln C \\ \arctan\left(\frac{v}{u}\right) &= \ln\left(C|u|\sqrt{۱ + \left(\frac{v}{u}\right)^{۲}}\right) \\ \arctan\left(\frac{y - ۲}{x - ۱}\right) &= \frac{۱}{۲}\ln\left((x - ۱)^{۲} + (y - ۲)^{۲}\right) + C \end{aligned}$$

□

(ج) برخی از معادلات را می بایست با تبدیلات دلخواه ساده نمود. یافتن اینگونه تبدیلات وابسته به تجربه است.

مثال ۱.۵.۳. حل معادلهٔ

$$y(۳x^{۲} + ۲y^{۲} - ۷)\,\mathrm{d}y - x(۸x^{۲} + ۳y^{۲} - ۷)\,\mathrm{d}x = \circ$$

[۲] شرط وجود جواب دستگاه اینست که $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq \circ$.

حل. با فرض $X = x^۲$ و $Y = y^۲$ و سپس دیفرانسیل از آنها $dX = ۲x\,\mathrm{dx}$ و $dY = ۲y\,\mathrm{dy}$ و با جایگذاری داریم

$$(۳X + ۲Y - ۷)dY - (۸X + ۳Y - ۷)dX = ۰$$

برای تغییر متغیرهای $X = u + s$ و $Y = v + t$ نیاز به یافتن ثابتهای s و t است پس:

$$\begin{cases} ۳X + ۲Y - ۷ = ۰, \\ ۸X + ۳Y - ۷ = ۰. \end{cases} \Rightarrow s = -۱ \ , \ t = ۵$$

و معادله با تغییر متغیرهای $X = u - ۱$ و $Y = v + ۵$ به معادلهٔ همگن

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{du}} = \frac{۸u + ۳v}{۳u + ۲v}$$

تبدیل می شود. پس از حل معادله بروش همگن داریم $(v - ۲u)^۷(v + ۲u) = C$ که با برگردادن متغیرها به x و y جواب عمومی عبارتست از تابع ضمنی

$$(y^۲ - ۲x^۲ - ۷)^۷(y^۲ + ۲x^۲ - ۳) = C$$

□

(د) گاهی اوقات جابجا کردن متغیر مستقل و وابسته به حل معادله کمک می کند. به مثال زیر دقت نمائید:

مثال ۱.۵.۴. حل معادلهٔ دیفرنسیل

$$(۱ + ۲e^{\frac{x}{y}})\,\mathrm{dx} + ۲e^{\frac{x}{y}}(۱ - \frac{x}{y})\,\mathrm{dy} = ۰$$

حل. با تعویض x و y معادله چنین می شود

$$(۱ + ۲e^{\frac{y}{x}})\,\mathrm{dy} + ۲e^{\frac{y}{x}}(۱ - \frac{y}{x})\,\mathrm{dx} = ۰$$

می نویسیم

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{۲e^{\frac{y}{x}}(۱ - \frac{y}{x})}{۱ + ۲e^{\frac{y}{x}}}$$

با بررسی اینکه معادله همگن از درجه صفر است و با جانشینی $y = ux$ داریم:

$$\begin{aligned}
u'x + u &= -\frac{2e^u(1-u)}{1+2e^u} \\
u'x &= \frac{-2e^u - u}{1+2e^u} \\
\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}x &= \frac{-2e^u - u}{1+2e^u} \\
\frac{1+2e^u}{-2e^u-u}\mathrm{du} &= \frac{\mathrm{dx}}{x} \\
-\int \frac{1+2e^u}{2e^u+u}\mathrm{du} &= \int \frac{\mathrm{dx}}{x} + C \\
-\ln|2e^u+u| &= \ln|x| + \ln C \\
2e^u + u &= \frac{1}{Cx} \\
2e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} &= \frac{1}{Cx} \\
2ye^{\frac{x}{y}} + x &= k \ , \ \ k = \frac{1}{C}
\end{aligned}$$

□

مثال ۱.۵.۵. حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = \frac{y - xy^2}{x^2y + x}$$

حل. این معادله همگن و تفکیک پذیر نبوده ولی می توان با جانشینی ux^n بجای y، بازای مقدار مناسبی از n آنرا حل کرد. در ادامه معادله چنین می شود:

$$\begin{aligned}
u'x^n + nx^{n-1}u &= \frac{ux^n - xu^2x^{2n}}{x^2ux^n + x} \\
u'x^n &= \frac{ux^n - u^2x^{2n+1}}{ux^{n+2} + x} - nx^{n-1}u \\
u'x^n &= \frac{ux^n(1-n) - u^2x^{2n+1}(1+n)}{ux^{n+2} + x}
\end{aligned}$$

کافیست در صورت طرف راست معادله، مقدار $n + 1$ را صفر قرار دهیم و با اینکار بزرگترین توان عامل از بین خواهند رفت و با جایگذاری $n = -1$ معادله به

$$u' = \frac{2u}{x(u+1)}$$

تبدیل شده که تفکیک پذیر است. جواب این معادله $u + \ln u = ۲ \ln x + C$ است که با بازگرداندن متغیر $u = xy$ جواب عمومی، تابع ضمنی

$$xy + \ln y - \ln x = C$$

خواهد بود. □

تمرین ۶.۱. .

۱. معادلات زیر را با روش تغییر متغیر حل کنید:

$$\begin{array}{lllll}
(a) & (x-y)\,\mathrm{dx} + \,\mathrm{dy} = ۰ & , & (b) & y' = \sin(x+y) \\
(c) & \tan^{۲}(t+y)\,\mathrm{dt} - \,\mathrm{dy} = ۰ & , & (d) & y(xy+۱)\,\mathrm{dx} + x(۱+xy+x^{۲}y^{۲})\,\mathrm{dy} = ۰ \\
(e) & y' = \dfrac{۳y - ۲x}{x} & , & (f) & (-۴x - y + ۴)\,\mathrm{dx} + (۴y + x - ۱)\,\mathrm{dy} = ۰ \\
(g) & y' = (۲x - y + ۱)^{۳} & , & (h) & \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = (y - ۴x)^{۲} \\
(i) & y' = \dfrac{۲x + ۲y - ۵}{۳x + ۳y - ۷} & , & (j) & (۴x - y + ۷)\,\mathrm{dx} + (۲x + y - ۱)\,\mathrm{dy} = ۰
\end{array}$$

۲. معادلات دیفرانسیل زیر را با تغییر متغیر $y = ux^n$ بازاء مقدار مناسبی از n حل نمائید.

$$(a)\; y' = \frac{۱ - ۳x^{۳}y^{۲}}{۲x^{۴}y} \;\; , \;\; (b)\; y' = \frac{۲xy^{۲}}{۱ - x^{۲}y} \;\; , \;\; (c)\; y' = \frac{y - ۲xy^{۲}}{x}$$

۷.۱ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کامل

بسیاری از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را می توان به شکل

$$M(x,y)\,\mathrm{dx} + N(x,y)\,\mathrm{dy} = ۰ \qquad (۱.۱)$$

نوشت. این شکل از معادله اگر دارای شرط کامل بودن باشد، دارای جوابی بصورت تابع ضمنی $f(x,y) = C$ است. این روش حل معادله از مهمترین روشها در حل معادلات مرتبه اول بشمار می رود. در ابتدا به مفهوم کامل بودن می پردازیم.

معادلهٔ دیفرانسیل (۱.۱) را معادلهٔ کامل[۳] گوئیم اگر دیفرانسیل یک تابع باشد، یعنی تابعی پیوسته مانند $f(x,y) = C$ چنان وجود داشته باشد که

$$df(x,y) = M(x,y)\,\mathrm{dx} + N(x,y)\,\mathrm{dy} = ۰ \qquad (۱a)$$

از طرفی طبق قاعده مشتق ضمنی تابع $f(x,y) = C$ می نویسیم:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{dy} = ۰ \qquad (۱b)$$

[۳] Exact Equation

با مقایسه $(1a)$ و $(1b)$ داریم $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = N$. همچنین از آنجا که برای تابعی با مشتقات پیوسته همواره $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ است، می توان شرط کامل بودن را بصورت

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

نوشت که **شرط لازم** برای کامل بودن معادلهٔ (۱.۱) است. بلعکس، اگر $M(x,y)$ و $N(x,y)$ و مشتقات جزئی اول آنها در ناحیه ای مثل D از صفحهٔ xy پیوسته باشند، با فرض $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ چنین f پیوسته ای وجود دارد: فرض کنید $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه ای در دامنهٔ جواب D است[۴]، بنابر $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ داریم:

$$\begin{aligned}
f &= \int_{x_\circ}^{x} M(x,y)\,\mathrm{dx} + g(y) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_\circ}^{x} M\,\mathrm{dx} + g'(y) \\
&= \int_{x_\circ}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{dx} + g'(y) \\
&= \int_{x_\circ}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{dx} + g'(y) \qquad ; \quad \left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\right) \\
N(x,y) &= N(x,y) - N(x_\circ,y) + g'(y) \;;\; \left(\frac{\partial f}{\partial y} = N\right) \\
g'(y) &= N(x_\circ, y) \\
g(y) &= \int_{y_\circ}^{y} N(x_\circ,y)\,\mathrm{dy} + C \\
\Longrightarrow f(x,y) &= \int_{x_\circ}^{x} M(x,y)\,\mathrm{dx} + \int_{y_\circ}^{y} N(x_\circ,y)\,\mathrm{dy} + C \qquad (۲)
\end{aligned}$$

که براحتی با مشتقگیری ثابت می شود که این تابع بدست آمده در شرط مذکور صدق می کند. لذا چنین ثابت کردیم:

[۴] دامنهٔ جواب لزوماً باید همبند ساده فرض شود تا مشتقات جزئی به درون انتگرال بروند

مطلب ۱.۲

معادله $M(x,y)\,\mathrm{dx}+N(x,y)\,\mathrm{dy}=0$ کامل است اگر $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$. برای حل یک معادله کامل، از آنجائیکه f و M و N توابعی دو متغیره از x و y هستند، از رابطه $M=\frac{\partial f}{\partial x}$ می نویسیم:

$$f=\int M\,\mathrm{dx}+g(y) \tag{۳}$$

که $g(y)$ تابعی فقط بر حسب y است. برای یافتن $g(y)$ چون $N=\frac{\partial f}{\partial y}$ است، از این رابطه $g(y)$ را بدست آورده و بنابراین جواب عمومی $f(x,y)=C$ حاصل می شود.

واضح است که این جواب عمومی $f(x,y)=C$ توسط معادله (۲) نیز تعیین می گردد.

مثال ۱.۷.۱. بررسی کنید که معادلهٔ دیفرانسیل $(xy+y^۲-۱)\,\mathrm{dx}+(۳x^۲-e^y)\,\mathrm{dy}=0$ کامل است یا خیر؟

حل. ضریب dx را M و ضریب dy را N می گیریم. داریم

$$\begin{cases} xy+y^۲-۱=M & , \\ ۳x^۲-e^y=N & . \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=x+۲y\ ,\ \frac{\partial N}{\partial x}=۶x$$

که برابر نبوده و معادله کامل نیست. □

مثال ۲.۷.۱. کامل بودن معادلهٔ $(xe^{xy}-۱)\,\mathrm{dy}+(۲+ye^{xy})\,\mathrm{dx}=0$ را بررسی کنید.

حل. چون

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= e^{xy}+xye^{xy}\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= e^{xy}+xye^{xy}\end{aligned}$$

و معادله کامل است. □

مثال ۳.۷.۱. حل معادلهٔ $(۲xy)\,\mathrm{dx}+(x^۲+۱)\,\mathrm{dy}=0$.

حل. می نویسیم

$$\frac{\partial M}{\partial y}=۲x\ ,\ \frac{\partial N}{\partial x}=۲x$$

بنابراین معادله کامل است. طبق مطلب ۱,۲ چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x,y)=\int M\ \mathrm{dx}+g(y) &\Rightarrow\quad f=\int(۲xy)\,\mathrm{dx}+g(y)\\ &\Rightarrow\quad f=x^۲y+g(y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}=N &\Rightarrow\quad x^۲+g'(y)=x^۲+۱\\ &\Rightarrow\quad g'(y)=۱\\ &\Rightarrow\quad g(y)=y+C \end{aligned}$$

و $f(x,y)=x^۲y+y+C=۰$ تابع مورد نظر بوده، حل تمام است. □

مثال ۴.۷.۱. مطلوبست حل معادلهٔ دیفرانسیل $(۲xy+e^y)\,\mathrm{dx}+(x^۲+xe^y)\,\mathrm{dy}=۰$.

حل. می نویسیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= ۲x+e^y\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= ۲x+e^y \end{aligned}$$

پس معادله کامل است:

$$\begin{aligned} f(x,y)=\int M\ \mathrm{dx}+g(y) &\Rightarrow\quad f=\int(۲xy+e^y)\,\mathrm{dx}+g(y)\\ &\Rightarrow\quad f=x^۲y+e^yx+g(y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}=N &\Rightarrow\quad x^۲+e^yx+g'(y)=x^۲+xe^y\\ &\Rightarrow\quad g'(y)=۰\\ &\Rightarrow\quad g(y)=C\\ &\Rightarrow\quad f(x,y)=x^۲y+e^yx+C=۰ \end{aligned}$$

□

مطلب ۱.۳

روش حل بیان شده در مطلب ۱.۲ را، در مواردی که انتگرال N آسانتر محاسبه می شود می توان بصورت زیر چنان انجام داد که چون $N = \frac{\partial f}{\partial y}$ می توان مقدار f را از رابطه

$$f = \int N\,\mathrm{dy} + h(x) \qquad (۴)$$

محاسبه نمود که $h(x)$ تابعی صرفاً بر حسب x است. سپس از $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ مقدار $h(x)$ را بدست آورده و $f(x,y) = C$ را می یابیم.

ذکر این گفته ضروری است که در هر دو روش (۳) و (۴) برای بدست آوردن توابع $g(y)$ و $h(x)$ لزوماً باید این توابع تک متغیره باشند وگرنه یا معادله کامل نبوده و یا در محاسبات دچار اشکال شده‌ایم.

تمرین ۸.۱. معادلات دیفرانسیل زیر را با روش معادله کامل حل کنید.

$$\begin{array}{llcll}
(a) & y\,\mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy} = ۰ & , & (b) & (۳x^۲ - y)\,\mathrm{dx} + (۳y^۲ - x)\,\mathrm{dy} = ۰ \\
(c) & (۲xy - ۲y)\,\mathrm{dx} + (x^۲ - ۲x)\,\mathrm{dy} = ۰ & , & (d) & \sin y\,\mathrm{dx} + (x\cos y + ۱)\,\mathrm{dy} = ۰ \\
(e) & (ye^{xy} + ۲)\,\mathrm{dx} + (xe^{xy} - ۲y)\,\mathrm{dy} = ۰ & , & (f) & (۱ + r\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta + \sin\theta\,\mathrm{dr} = ۰
\end{array}$$

تمرین ۹.۱. معادلهٔ دیفرانسیل مثال ۲.۷.۱ را حل کنید.

۱.۹.۱ عامل انتگرالساز

همیشه چنین نیست که معادله به شکل $M(x,y)\,\mathrm{dx} + N(x,y)\,\mathrm{dy} = ۰$ کامل باشد. اما در پاره ای حالات می توان آن را به معادله کامل تبدیل کرد. اگر معادله ای کامل نباشد، می توان با ضرب آن در عامل انتگرالساز[۵]، آنرا به معادله‌ای کامل تبدیل نمود. تابع $I(x,y)$ یک عامل انتگرالساز برای $M\,\mathrm{dx} + N\,\mathrm{dy} = ۰$ است اگر $I(M\,\mathrm{dx} + N\,\mathrm{dy}) = ۰$ کامل باشد.[۶]

برای مثال $\frac{-۱}{x^۲}$ عامل انتگرالساز برای معادلهٔ غیرکامل $y\,\mathrm{dx} - x\,\mathrm{dy} = ۰$ است زیرا با ضرب عامل در معادله داریم $\frac{-۱}{x^۲}y\,\mathrm{dx} - \frac{-۱}{x^۲}x\,\mathrm{dy} = ۰$ و یا $\frac{-y}{x^۲}\,\mathrm{dx} + \frac{۱}{x}\,\mathrm{dy} = ۰$ که یک معادلهٔ کامل است. البته $\frac{-۱}{x^۲}$ تنها عامل انتگرالساز نبوده و در حقیقت هر معادله دارای بیشمار عامل انتگرالساز است.

حال فرض کنید تابع $I(x,y)$ یک عامل انتگرالساز برای معادلهٔ غیرکامل $M\,\mathrm{dx} + N\,\mathrm{dy} = ۰$ بوده و

[۵] Integrating Factor
[۶] http://mathworld.wolfram.com/IntegratingFactor.html

$IM\,\mathrm{dx} + IN\,\mathrm{dy} = ۰$ معادله‌ای کامل است بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial(IM)}{\partial y} &= \frac{\partial(IN)}{\partial x}\\ \frac{\partial I}{\partial y}M + I\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial I}{\partial x}N + I\frac{\partial N}{\partial x}\\ I(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) &= \frac{\partial I}{\partial x}N - \frac{\partial I}{\partial y}M \qquad (۵)\end{aligned}$$

واضح است که حالات مختلفی را می توان از این رابطه برحسب M و N استخراج کرد. سه حالت خاص را مدنظر قرار می دهیم:

(الف) I تنها تابعی از x است، پس $\frac{\partial I}{\partial y} = ۰$ و رابطهٔ (۵) بصورت $\frac{\partial I}{I} = p(x)\,\mathrm{dx}$ خواهد بود که

$$p(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

و در نتیجه تابع $I = e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}}$ عامل انتگرالساز است.

(ب) I تنها تابعی از y است $\frac{\partial I}{\partial x} = ۰$ و رابطهٔ (۵) بشکل $\frac{\partial I}{I} = p(y)\,\mathrm{dy}$ در می آید که

$$p(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

و در این حالت نیز تابع $I = e^{\int p(y)\,\mathrm{dy}}$ عامل انتگرالساز می باشد.

بنابراین در مواقعی که معادله کامل نیست و $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ حاصل عبارت $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ را بدست می آوریم و یکی از دو مقدار $p = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ یا $p = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ را محاسبه می کنیم. اگر این مقدار تابعی از x بود، عامل انتگرالساز $I = e^{\int p\,\mathrm{dx}}$ و اگر این مقدار تابعی از y باشد، عامل انتگرالساز $I = e^{\int p\,\mathrm{dy}}$ خواهد بود.

(ج) با فرض $z = xy$ در معادلهٔ $M\,\mathrm{dx} + N\,\mathrm{dy} = ۰$ که $M = y\,g(z)$ و $N = x\,h(z)$ اگر

$$p(z) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{z(h-g)}$$

تابعی از z باشد، تابع $I = e^{\int p(z)\,\mathrm{dz}}$ عامل انتگرالساز معادله است.

مثال ۱.۹.۱. مطلوبست حل معادلهٔ $(x^۲ + y^۲ + x)\,\mathrm{dx} + y\,\mathrm{dy} = ۰$.

حل. چون

$$\frac{\partial M}{\partial y} = ۲y \ , \ \frac{\partial N}{\partial x} = ۰$$

پس معادله کامل نیست. برای محاسبهٔ عامل انتگرالساز از آنجا که مقدار

$$p = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{۲y - ۰}{y} = ۲$$

تابعی ثابت است، حاصل $I = e^{\int p \ \mathrm{dx}} = e^{\int ۲ \, \mathrm{dx}} = e^{۲x}$ عامل انتگرالساز بوده و با ضرب آن در طرفین معادله داریم:

$$e^{۲x}(x^۲ + y^۲ + x)\,\mathrm{dx} + (ye^{۲x})\,\mathrm{dy} = ۰$$

شرایط کامل بودن را مجدداً بررسی می کنیم:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{۲x}۲y \ , \ \frac{\partial N}{\partial x} = ۲ye^{۲x}$$

بنابراین معادله کامل است و در نتیجه

$$\begin{aligned}
f = \int N \ \mathrm{dy} + g(x) \quad &\Rightarrow \quad f = \int (ye^{۲x})\,\mathrm{dy} + g(x) \\
&\Rightarrow \quad f = \frac{۱}{۲}e^{۲x}y^۲ + g(x) \\
\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad &\Rightarrow \quad e^{۲x}y^۲ + g'(x) = e^{۲x}(x^۲ + y^۲ + x) \\
&\Rightarrow \quad g'(x) = e^{۲x}(x^۲ + x) \\
&\Rightarrow \quad g(x) = x^۲e^{۲x} + C \\
&\Rightarrow \quad f(x,y) = x^۲e^{۲x} + y^۲e^{۲x} + C = ۰
\end{aligned}$$

و حل تمام است. □

مثال ۲.۹.۱. مطلوبست حل معادله $y' + ۲xy = y$.

حل. در این معادله که $(۲xy - y)\,\mathrm{dx} + \ \mathrm{dy} = ۰$ می بینیم

$$\frac{\partial M}{\partial y} = ۲x - ۱ \ , \ \frac{\partial N}{\partial x} = ۰$$

پس معادله کامل نیست. برای محاسبهٔ عامل انتگرالساز و تبدیل آن به معادله کامل داریم:

$$p = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{۲x - ۱}{-y(۲x - ۱)} = \frac{-۱}{y}$$

یعنی $I = e^{\int \frac{-۱}{y} \, \mathrm{dy}} = \frac{۱}{y}$ عامل انتگرالساز بوده و با ضرب آن در طرفین معادله

$$(۲x - ۱)\,\mathrm{dx} + \frac{۱}{y}\,\mathrm{dy} = ۰$$

پس از بررسی شرایط کامل بودن، بوضوح معادله تفکیک پذیر است لذا

$$\begin{aligned}\int(2x-1)\,\mathrm{dx}+\int\frac{1}{y}\,\mathrm{dy} &= C\\ x^2-x+\ln|y| &= C\\ y &= ke^{-x^2+x}\end{aligned}$$

جواب عمومی معادله است. □

مثال ۳.۹.۱. حل معادله $(3xy+y^2)+(x^2+xy)y'=0$

حل. با نگارش معادله بشکل $(3xy+y^2)\,\mathrm{dx}+(x^2+xy)\,\mathrm{dy}=0$ و بررسی شرط معادله کامل

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x+2y\ ,\ \ \frac{\partial N}{\partial x}=2x+y$$

پس معادله کامل نبوده و برای محاسبهٔ عامل انتگرالساز و تبدیل آن به معادله کامل می نویسیم:

$$p=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{x+y}{x^2+xy}=\frac{1}{x}$$

و $I=e^{\int\frac{1}{x}\,\mathrm{dx}}=e^{\ln x}=x$ عامل انتگرالساز بوده که با ضرب آن در طرفین معادله

$$(3x^2y+xy^2)\,\mathrm{dx}+(x^3+x^2y)\,\mathrm{dy}=0$$

بدست می آید. با بررسی شرط معادله کامل، آنرا بروش کامل حل می کنیم که جواب عمومی تابع ضمنی $x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2=C$ خواهد بود. □

مثال ۴.۹.۱. حل معادلهٔ $y(1-x^2y^2)\,\mathrm{dx}+x\,\mathrm{dy}=0$

حل. طبق مورد (ج) ذکرشده در فوق با فرض $z=xy$ داریم $M=y.g(z)$ و $N=x.h(z)$ که $g=1-z^2$ و $h=1$ و از طرفی

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-z^2+1-2z^2-1=-3z^2$$

در ادامه

$$p(z)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{z(h-g)}=\frac{-3z^2}{z(1-1+z^2)}=\frac{-3}{z}$$

که تابعی از z بوده و تابع

$$I=e^{\int p(z)\,\mathrm{dz}}=e^{\int-\frac{3}{z}\,\mathrm{dz}}=\frac{1}{z^3}=\frac{1}{x^3y^3}$$

عامل انتگرالساز معادله است. با ضرب عامل انتگرالساز I در معادله چنین حاصل می شود:

$$\left(\frac{1}{x^3y^2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{dx}+\frac{1}{x^2y^3}\mathrm{dy}=0$$

و معادله با شرط $\frac{-2}{x^3y^3}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$ کامل شده پس

$$\begin{aligned}
f(x,y)=\int M\ \mathrm{dx}+g(y) \quad &\Rightarrow \quad f(x)=\frac{-1}{2x^2y^2}-\ln x+g(y)\\
\frac{\partial f}{\partial y}=N \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2y^3}-0+g'(y)=\frac{1}{x^2y^3}\\
&\Rightarrow \quad g'(y)=0\\
&\Rightarrow \quad g(y)=C\\
&\Rightarrow \quad f(x,y)=\frac{-1}{2x^2y^2}-\ln x=C
\end{aligned}$$

مثال انتهائی بخش را بگونه ای متفاوت با روش های فوق حل خواهیم نمود. در اینجا مستقیماً با ضرب معادله در تابعی مجهول و این فرض که معادله کامل خواهد شد عامل انتگرالساز را بدست خواهیم آورد. □

مثال ۵.۹.۱. حل معادلهٔ $(6y\,\mathrm{dx}-4x\,\mathrm{dy})+x^2y^3(15y\,\mathrm{dx}+3x\,\mathrm{dy})=0$

حل. با ضرب این معادله در عامل $x^\alpha y^\beta$ می نویسیم:

$$(6x^\alpha y^{\beta+1}\,\mathrm{dx}-4x^{\alpha+1}y^\beta\,\mathrm{dy})+(15x^{\alpha+2}y^{\beta+4}\,\mathrm{dx}+3x^{\alpha+3}y^{\beta+3}\,\mathrm{dy})=0$$

با فرض اینکه عبارت، دیفرانسیل کامل یک تابع است، مطابق توانهای موجود بایستی داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
d(x^{\alpha+1}y^{\beta+1})&=(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+1}\,\mathrm{dx}+(\beta+1)x^{\alpha+1}y^\beta\,\mathrm{dy}\\
d(x^{\alpha+3}y^{\beta+4})&=(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+4}\,\mathrm{dx}+(\beta+4)x^{\alpha+3}y^{\beta+3}\,\mathrm{dy}
\end{aligned}$$

با تشکیل تشابهات بین پرانتزها و دیفرانسیل ها می بایست داشته باشیم

$$\frac{\alpha+1}{6}=\frac{\beta+1}{-4}\ ,\ \frac{\alpha+3}{15}=\frac{\beta+4}{3}\ \Rightarrow\ \alpha=2\ ,\ \beta=-3$$

با ضرب عامل $x^\alpha y^\beta=x^2y^{-3}$ در معادله، جواب عبارتست از $2x^3y^{-2}+3x^5y=C$. □

تمرین ۱۰.۱. .

۱. معادلات دیفرانسیل زیر را با یافتن عامل انتگرالساز حل کنید.

$$
\begin{array}{llcll}
(a) & x\,\mathrm{dy} - y\,\mathrm{dx} = ۰ & , & (b) & ۲x\sin ۳y\,\mathrm{dx} + ۳x\cos ۳y\,\mathrm{dy} = ۰ \\
(c) & (۳xy + ۲y^۲)\,\mathrm{dx} + (x^۲ + ۲xy)\,\mathrm{dy} = ۰ & , & (d) & y(e^x - ۱)\,\mathrm{dx} + (e^x + ۱)\,\mathrm{dy} = ۰ \\
(e) & (x + ۲y)\,\mathrm{dx} + (x + ۲y + ۱)\,\mathrm{dy} = ۰ & , & (f) & (y + ۲e^x)\,\mathrm{dx} + \mathrm{dy} = ۰
\end{array}
$$

۲. اگر I و J دو عامل انتگرالساز برای معادلهٔ دیفرانسیل غیرکامل $M\,\mathrm{dx} + N\,\mathrm{dy} = ۰$ باشند، نشان دهید $I + kJ$ برای هر ثابت k عامل انتگرالساز معادلهٔ دیفرانسیل خواهد بود.

۱.۱۰.۱ عامل دیفرانسیل ساز

استفاده از دیفرانسیل برخی از عبارات باعث سهولت در یافتن جواب بعضی از معادلات می‌گردد. برای مثال از آنجائیکه $x\,\mathrm{dy} + y\,\mathrm{dx} = d(xy)$ است، با داشتن عبارت $x\,\mathrm{dy} + y\,\mathrm{dx}$ و جایگذاری $d(xy)$ بجای آن براحتی عبارت قابل انتگرالگیری است. به مثال زیر توجه نمائید:

مثال ۱.۱۰.۱. حل معادلهٔ $(y - x^۲)\,\mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy} = ۰$.

حل. با نگارش معادله بشکل $y\,\mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy} = x^۲\,\mathrm{dx}$ و از آنجائیکه $d(xy) = x\,\mathrm{dy} + y\,\mathrm{dx}$ عبارت دیفرانسیلی کاملیست، بنابراین

$$
\begin{aligned}
y\,\mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy} &= x^۲\,\mathrm{dx} \\
d(xy) &= x^۲\,\mathrm{dx} \\
\int d(xy) &= \int x^۲\,\mathrm{dx} + C \quad , \quad (\int \mathrm{du} = u) \\
xy &= \frac{۱}{۳}x^۳ + C \\
y &= \frac{۱}{۳}x^۲ + \frac{C}{x}
\end{aligned}
$$

□

بعضی از عبارات بصورت ترکیبی از چند عبارتند. مثلاً چون

$$\frac{x\,\mathrm{dy} - y\,\mathrm{dx}}{xy} = d\left(\ln|\frac{y}{x}|\right)$$

بنابراین عبارت $x\,\mathrm{dy} - y\,\mathrm{dx}$ در صورت، نیاز به عامل xy در مخرج دارد تا به عبارت کامل دیفرانسیلی مبدل شود. در اینگونه موارد با یافتن بهترین عامل دیفرانسیل ساز می توان معادله را به ساده ترین شکل حل نمود. کاربردی ترین عبارات دارای دیفرانسیل کامل در جدول ذیل آمده است:

	عبارت	عامل ضربی	دیفرانسیل ایجاد شده
۱	$y\,dx + x\,dy$	$-$	$x\,dy + y\,dx = d(xy)$
۲	$y\,dx - x\,dy$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$
۳	$y\,dx - x\,dy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d(\frac{x}{y})$
۴	$y\,dx - x\,dy$	$\frac{-1}{xy}$	$\frac{x\,dy - y\,dx}{xy} = d(\ln\|\frac{y}{x}\|)$
۵	$y\,dx - x\,dy$	$\frac{-1}{x^2+y^2}$	$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = d(\arctan\frac{y}{x})$
۶	$y\,dx + x\,dy$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{y\,dx + x\,dy}{xy} = d(\ln\|xy\|)$
۷	$y\,dx + x\,dy$	$\frac{1}{(xy)^n}\ ,\ (n>1)$	$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^n} = d\Big(\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\Big)$
۸	$y\,dy + x\,dx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{y\,dy + x\,dx}{x^2+y^2} = d\Big(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big)$
۹	$y\,dy + x\,dx$	$\frac{1}{(x^2+y^2)^n}\ ,\ (n>1)$	$\frac{y\,dy + x\,dx}{(x^2+y^2)^n} = d\Big(\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\Big)$
۱۰	$ay\,dx + bx\,dy$	$x^{a-1}y^{b-1}$	$x^{a-1}y^{b-1}(ay\,dx + bx\,dy) = d(x^a y^b)$

آنگونه در این جدول می بینید بر حسب عبارت موجود می بایست عامل دیفرانسیل ساز را در معادله ضرب نمود تا عبارت کامل دیفرانسیلی پدید آید. به مثالهای ذیل توجه نمائید:

مثال ۲.۱۰.۱. مطلوبست حل معادلهٔ $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x^5y^2-1)}{x}$.

حل.

$$\begin{aligned}
y\,dx + x\,dy &= x^5y^3\,dx \\
\frac{y\,dx + x\,dy}{x^3y^3} &= x^2\,dx \\
\int d\left(\frac{-1}{2x^2y^2}\right) &= \int x^2\,dx + C \quad \text{فرمول شماره ۷ جدول} \\
\frac{-1}{2x^2y^2} &= \frac{x^3}{3} + C \\
&\Rightarrow\ 2x^5y^2 + 6Cx^2y^2 + 3 = 0
\end{aligned}$$

□

مثال ۳.۱۰.۱. حل معادلهٔ $ty' = 5t^3 - 2y$

حل. پس از ساده کردن معادله بصورت $2y\,dt + t\,dy = 5t^3\,dt$ از مقایسهٔ طرف چپ با فرمول شمارهٔ (۱۰)

جدول، دیده می شود که می بایست $a = ۲$ و $b = ۱$ بوده و بنابراین عامل ضربی

$$t^{۲-۱}y^{۱-۱} = t$$

خواهد بود. با ضرب طرفین معادله در t داریم $۲ty\,\mathrm{dt} + t^۲\,\mathrm{dy} = ۵t^۴\,\mathrm{dy}$ یا $d(t^۲y) = d(t^۵)$ و جواب معادله پس از ساده نمودن آن $y = t^۳ + Ct^{-۲}$ است. □

تمرین ۱۱.۱. موارد زیر را با عامل دیفرانسیل ساز حل کنید.

$$(a)\quad (y - ۲xy^۲)\,\mathrm{dx} - x\,\mathrm{dy} = ۰ \quad , \quad (b)\quad y(۱ + x^۴y)\,\mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy} = ۰$$
$$(c)\quad (۲ + ye^{xy})\,\mathrm{dx} + (xe^{xy} - ۲)\,\mathrm{dy} = ۰ \quad , \quad (d)\quad (۲y - xe^{xy})y' = ۲ + ye^{xy}$$

۱۲.۱ معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول

معادلهٔ خطی مرتبه اول بصورت

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{۶}$$

است که $p(x)$ و $q(x)$ توابعی از x هستند. اگر $p = ۰$ معادله بشکل $y' = q(x)$ در می آید که توسط انتگرال معمولی $y = \int q(x)\,\mathrm{dx} + C$ جواب حاصل می شود. اگر $q = ۰$ معادله بصورت $y' = -p(x)y$ در می آید که تفکیک پذیر بوده و حاصل آن $y = e^{\int -p(x)\,\mathrm{dx}} + C$ خواهد بود. در حالت کلی که $p, q \neq ۰$ است، معادلهٔ (۶) شکل

$$(py - q)\,\mathrm{dx} + \,\mathrm{dy} = ۰$$

را بخود می گیرد و از آنجاکه $\frac{\partial M}{\partial y} = p$ و $\frac{\partial N}{\partial x} = ۰$ پس (۶) معادله ای غیرکامل است و جهت حل دو روش ذیل پیشنهاد می شود. دقت نمائید که این معادله می بایست لزوماً مرتبه اول و قابل تبدیل به درجهٔ اول باشد و مثلاً معادلهٔ $(y')^۳ + ۳xy = e^x$ قابل حل با این روشها نیست.

۱.۱۲.۱ حل بروش عامل انتگرالساز

اگر I عامل انتگرالساز برای طرف چپ معادلهٔ (۶) باشد یعنی $Iy' + Ipy = Iq$ برای اینکه طرف چپ معادله‌ای کامل باشد بایستی $Iy' + Ipy = (Iy)'$ و در نتیجه

$$\begin{cases} Ipy = I'y & , \\ (Iy)' = Iq & . \end{cases}$$

که دو فرمول زیر را نتیجه می دهد:

$$\begin{cases} I(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}} & , (۷) \\ Iy = \int Iq\,\mathrm{dx} + C & . (۸). \end{cases}$$

و (۷) همان مقدار عامل انتگرالساز خواهد بود. این فرمول تضمین می کند که اگر طرفین (۶) را در آن ضرب کنیم طرف چپ حتماً دارای دیفرانسیل کامل خواهد شد. سپس از (۸) نتیجه حاصل می شود.

مثال ۱.۱۲.۱. حل معادلهٔ $y' - ۳y = ۶$.

حل. با داشتن $p = -۳$ عامل انتگرالساز برابر است با

$$I(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}} = e^{\int -۳\,\mathrm{dx}} = e^{-۳x}$$

با جایگذاری در (۸) داریم

$$ye^{-۳x} = \int ۶e^{-۳x}\,\mathrm{dx} + C$$

و جواب عمومی $y = -۲ + Ce^{۳x}$ خواهد شد. □

مثال ۲.۱۲.۱. مطلوبست حل معادلهٔ

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} - \frac{۴}{x}v = ۲$$

حل. چون معادله خطی مرتبه اول است با $p = -\frac{۴}{x}$ و $q = ۲$ طبق (۷) می نویسیم:

$$\begin{aligned}
I(x) &= e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}} = e^{\int -\frac{۴}{x}\,\mathrm{dx}} = e^{-۴\ln x} = \frac{۱}{x^۴} \\
Iv &= \int Iq(x)\,\mathrm{dx} + C \qquad \text{طبق (۸)} \\
\frac{۱}{x^۴}v &= \int \frac{۱}{x^۴}۲\,\mathrm{dx} + C \\
v &= x^۴\left(-\frac{۲}{۳x^۳} + C\right) \\
v &= -\frac{۲}{۳}x + Cx^۴
\end{aligned}$$

□

۲.۱۲.۱ حل بروش تغییر پارامتر

هرچند این روش ایده ای کاملاً زیباست ولی نسبت به روش قبلی مقبولیت کمتری دارد. در این روش با فرض $q = ۰$ معادلهٔ $y' + p(x)y = ۰$ را حل کرده و جواب عمومی را بصورت

$$y = Ce^{\int -p(x)\,\mathrm{dx}}$$

بدست می آوریم. اکنون پارامتر C را برابر تابع متغیری مانند u فرض نموده و با مشتقگیری و جایگذاری در (۶) مقدار تابع u را حساب می کنیم.

مثال ۳.۱۲.۱. مطلوبست حل معادلهٔ مثال۲.۱۲.۱ با روش تغییر پارامتر

حل.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}}-\frac{۴}{x}v &= ۰\\
\frac{\mathrm{dv}}{v} &= \frac{۴}{x}\,\mathrm{dx}\\
v &= Cx^۴\\
v &= ux^۴ \text{ تغییر پارامتر}\\
v' &= u'.x^۴+۴x^۳.u=u'x^۴+\frac{۴}{x}v\\
v'-\frac{۴}{x}v &= u'x^۴\\
۲ &= u'x^۴\\
u &= -\frac{۲}{۳x^۳}+k\\
v &= -\frac{۲}{۳}x+kx^۴
\end{aligned}$$

□

تمرین ۱۳.۱. .

۱. معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{llcll}
(a) & y'+۴y=۰ & , & (b) & t\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}-۲y=t^۳\cos ۴t\\
(c) & \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}+\dfrac{۵}{t}y=۰ & , & (d) & y'+y=\sin x\\
(e) & (e^x-۱)y'+e^xy=۰ & , & (f) & v'+\dfrac{۱}{t}v=۲\cos ۲t\\
(g) & y'+۲xy=۳x & , & (h) & \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}+v=۲\sin t\\
(i) & \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}+vt=-۲t & , & (j) & y'(\sin x\cos^۳ x)+y\cos ۲x\cos^۲ x=۱
\end{array}$$

۲. در یک معادلهٔ خطی مرتبه اول به شکل $y'+py=q(x)$ که در آن مقدار p تنها یک ثابت عددی است، می نویسیم:

$$I(x)=e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}}=e^{px}\Rightarrow ye^{px}=\int e^{px}q(x)\,\mathrm{dx}+C\Rightarrow y=e^{-px}\Big(\int e^{px}q(x)\,\mathrm{dx}+C\Big)$$

که جواب بشکل ساده تری بدست خواهد آمد. با این فرمول ساده شده، معادلات زیر را حل نمائید.

$$(k)\;\; y'-۶y=۵ \;\;,\;\; (l)\;\; y'+۲y=۲x^۳$$

۱۴.۱ معادله‌ٔبرنولی

معادلهٔ مرتبه اول به شکل

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\beta} \tag{۲.۱}$$

را بازای $\beta \neq ۰, ۱$ حقیقی، معادلهٔ برنولی گوئیم. روش حل این معادله به این طریق است که با جانشینی $u = y^{۱-\beta}$ و اینکه $y = u^{\frac{۱}{۱-\beta}}$ و سپس دیفرانسیل از طرفین داریم:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{۱}{۱-\beta} u^{\frac{\beta}{۱-\beta}} \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

با جایگذاری در معادله اولیه و ساده کردن آن، معادله به شکل ساده

$$\frac{۱}{۱-\beta} u' + pu = q$$

یا

$$u' + (۱-\beta)pu = (۱-\beta)q \tag{۳.۱}$$

در می آید که معادله‌ای خطی از مرتبهٔ اول است. همچنین معادلهٔ برنولی را می توان با تغییر متغیر $y = uv$ یا تغییر پارامتر نیز حل نمود.

مثال ۱.۱۴.۱. حل معادلهٔ برنولی $y' - \frac{۱}{۲x}y = ۶x^۳y^۵$.

حل. چون $\beta = ۵$ با جانشینی $u = y^{-۴}$ داریم $u' + \frac{۲}{x}u = -۲۴x^۳$ که معادله‌ای خطی از مرتبهٔ اول است و از آنجاکه $p = \frac{۲}{x}$ با بدست آوردن عامل انتگرالساز $I = x^۲$ می نویسیم:

$$x^۲u = \int x^۲(-۲۴x^۳)\,\mathrm{dx} + C$$

پس

$$u = \frac{C - ۴x^۶}{x^۲}$$

و از اینجا

$$y = u^{-\frac{۱}{۴}} = (\frac{C-۴x^۶}{x^۲})^{-\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{\frac{x^۲}{C-۴x^۶}}$$

که برای $x \leq \sqrt[۶]{C/۴}$ جواب معادله است. □

مثال ۲.۱۴.۱. مطلوبست جواب خصوصی معادلهٔ برنولی $y' + ۴xy = xy^۲$ با شرط $y(۰) = ۲$.

حل. برای $\beta = ۲$ چون $u = y^{۱-۲} = \frac{۱}{y}$ یا $y = \frac{۱}{u}$ پس $y' = -\frac{u'}{u^۲}$ با جایگذاری در معادله می نویسیم:

$$\begin{aligned}
-\frac{u'}{u^۲} + ۴x\frac{۱}{u} &= x\frac{۱}{u^۲}\\
-u' + ۴xu &= x\\
-u' &= x(-۴u+۱) \text{ تفکیک پذیر}\\
\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} &= x(۴u-۱)\\
\int \frac{\mathrm{du}}{۴u-۱} &= \int x\,\mathrm{dx} + C\\
\frac{۱}{۴}\ln|۴u-۱| &= \frac{۱}{۲}x^۲ + C\\
\frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{۴}{y}-۱\right| &= \frac{۱}{۲}x^۲ + C
\end{aligned}$$

که با لحاظ شرط اولیهٔ $y(۰) = ۲$ مقدار $C = ۲$ شده و جواب خصوصی معادله عبارتست از $y = \frac{۴}{e^{۲x^۲}+۱}$. □

مثال ۳.۱۴.۱. مطلوبست حل معادلهٔ $x\,\mathrm{dy} - y\,\mathrm{dx} - xy^۳\ln x\ \mathrm{dx} = ۰$.

حل. با ساده کردن معادله بصورت

$$y' - \frac{۱}{x}y = y^۳\ln x$$

معادلهٔ برنولی با $\beta = ۳$ است. بنابراین با جانشینی $u = y^{-۲}$ و دیفرانسیل از طرفین داریم

$$u' = -۲y^{-۳}y'$$

و با جایگذاری چنین بدست می آید:

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} + \frac{۲}{x}u = -۲\ln x$$

این معادله خطی مرتبه اول با عامل انتگرالساز $I = e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}} = e^{۲\ln x} = x^۲$ می باشد که با ضرب طرفین آن در $I = x^۲$ داریم

$$x^۲u = -۲\int x^۲\ln x\,\mathrm{dx} + C$$

و جواب عمومی عبارتست از تابع ضمنی

$$\frac{x^۲}{y^۲} = -\frac{۲}{۹}x^۳(۳\ln x - ۱) + C$$

□

۱۵.۱ معادله‌ریکاتی

معادلهٔ ریکاتی به شکل کلی $y' + p(x)y = q(x)y^{۲} + r(x)$ است [۷] که اگر $r = ۰$ معادلهٔ برنولی با $\beta = ۲$ بوده و اگر $q(x) = ۰$ باشد، خطی مرتبهٔ اول است. حالت کلی معادلهٔ ریکاتی تنها وقتی قابل حل است که یک جواب خصوصی آن مثلاً y_p معلوم باشد و با فرض $y = \frac{۱}{u} + y_p$ مسئله را بر حسب u به معادلهٔ مرتبه اول به فرم $u' - (p + ۲qy_p)u = -q$ تبدیل خواهیم کرد.

مثال ۱.۱۵.۱. حل معادلهٔ ریکاتی $x(x^{۲} - ۱)y' = y^{۲} - y + x^{۲}(y - ۱)$ که جواب خصوصی $y_p = x^{۲}$ از آن معلوم است.

حل. قبل از حل می توان معادله را به شکل معادلهٔ ریکاتی درآورد یعنی

$$y' - \frac{۱}{x}y = \frac{۱}{x(x^{۲} - ۱)}y^{۲} - \frac{x}{x^{۲} - ۱}$$

حال با فرض $y = \frac{۱}{u} + x^{۲}$ و $y' = -\frac{u'}{u^{۲}} + ۲x$ و جایگذاری در معادله داریم:

$$u' + \frac{۳x^{۲} - ۱}{x^{۳} - x}u = -\frac{۱}{x^{۳} - x}$$

که معادلهٔ خطی مرتبه اول با $p(x) = \frac{۳x^{۲} - ۱}{x^{۳} - x}$ بوده و با عامل انتگرالساز $I = x^{۳} - x$ جواب $u = \frac{C - x}{x^{۳} - x}$ را نتیجه می دهد و بالاخره $y = \frac{Cx^{۲} - x}{C - x}$ جواب عمومی معادله است. □

تمرین ۱۶.۱. .

۱. معادلات برنولی زیر را حل نمائید.

$$(a)\ ۲y\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + ۱ = \frac{۱}{x}y^{۲} \quad , \quad (b)\ \frac{x\ \mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + y = -x^{۲}y^{۲}$$

$$(c)\ y' + \frac{۵}{۲}x^{۳}y = \frac{۲}{xy} \quad , \quad (d)\ y' - \frac{۴}{x}y - x\sqrt{y} = ۰$$

۲. معادلات ریکاتی زیر، که یک جواب خصوصی آنها داده شده را حل کنید.

$$(e)\ y' - ۳xy = -y^{۲} + ۱ - ۲x^{۲} \quad , \quad y_p = x$$

$$(f)\ \ y' - ۴xy = ۴ - ۲y^{۲} - ۴x \quad , \quad y_p = ۲x - ۱$$

[۷] در واقع معادله ای که توسط ریکاتی حل شده بصورت $y' + by^{۲} = cx^{m}$ بود و معادلهٔ فوق توسط برنولی حل شد. ولی بهرحال به نام ریکاتی مشهور است.

۱۷.۱ معادلات درجات بالاتر

برای معادلات مرتبه اولی که دارای درجه بیشتر از یک هستند روش حل کلی وجود ندارد ولی در برخی حالات خاص می توان آنها را حل نمود. برای مثال معادلهٔ $(y')^۲ + ۲xy' - x = ۰$ بر حسب y' معادله معمولی درجه دو بوده و به راحتی قابل حل است. بنابراین با روشهای موجود و یا روشهای تجربی ممکن است بتوان چنین معادلاتی را حل نمود. البته باید توجه داشت که جوابهای حاصل در این نوع معادله لزوماً بطور صریح جواب عمومی یا خصوصی نبوده و ممکن است جواب غیرعادی و یا پوش منحنی های جواب باشد، لذا صحت جواب بدست آمده نیازمند بررسی خواهد بود. اینک چند روش را بررسی می کنیم.

۱.۱۷.۱ معادلهٔ درجه دو

اگر معادلهء دیفرانسیل بصورت $f(x,y,y') = ۰$ و از درجه دوم باشد، با حل معادله نسبت به مجهول y' دو معادله $y' = f(x,y)$ و $y' = g(x,y)$ بدست می آید. فرض کنید که جواب این دو معادله بترتیب $F(x,y,C) = ۰$ و $G(x,y,C) = ۰$ باشد، از آنجا که هر جواب معادله اصلی حداقل در یکی از این دو معادله صدق می کند لذا جواب نهائی احتمالی به شکل

$$F(x,y,C)G(x,y,C) = ۰$$

خواهد بود. پس از آن باید صحت جواب حاصل بررسی گردد.

مثال ۱.۱۷.۱. حل معادلهٔ $(y')^۲ - ۴x^۲ = ۰$.

حل. این معادله مرتبه اول و درجه دوم دارای دو ریشهٔ $y' = \pm ۲x$ است. با حل این دو معادله و یافتن جوابهای $y = x^۲ + C$ و $y = -x^۲ + C$، جواب نهائی عبارتست از

$$(y - x^۲ - C)(y + x^۲ - C) = ۰$$

یا $(y - C)^۲ = x^۴$. به آسانی می توان دید که جواب ها در معادله صدق می کنند. □

مثال ۲.۱۷.۱. حل معادلهٔ $x^۲(y'^۲ + ۹) = ۲xyy' + ۸y^۲$.

حل. با ساده کردن معادله به عبارت زیر می رسیم

$$x^۲(y')^۲ + y^۲ - ۲xyy' = ۹y^۲ - ۹x^۲$$

که طرف چپ اتحادی جبری است و

$$(xy' - y)^۲ = ۹(y^۲ - x^۲)$$

این معادله مرتبه اول درجه دوم دارای دو ریشهٔ $y' = \frac{y \pm ۳\sqrt{y^۲ - x^۲}}{x}$ است که طرف راست تابعی همگن درجه صفر است و با کمی تغییر برابرست با

$$y' = \frac{y}{x} \pm ۳\sqrt{(\frac{y}{x})^۲ - ۱}$$

با حل این دو معادلهٔ همگن و یافتن جوابهای $y = x\cosh(\ln(Cx^۳))$ و $y = x\cosh(\ln(\frac{C}{x^۳}))$، جواب نهائی

$$\left[y - x\cosh\left(\ln(\frac{C}{x^۳})\right)\right]\left[y - x\cosh\left(\ln(Cx^۳)\right)\right] = ۰$$

است. □

۲.۱۷.۱ حل معادله با وارد کردن پارامتر

اگر معادله دیفرانسیل بشکل $x=f(y,y')$ باشد با فرض $y'=p$ و دیفرانسیل از طرفین معادلهٔ $x=f(y,p)$ می توان دستگاه زیر را تشکیل داد و x و y را بدست آورد.

$$x=f(y,p)\ \ ,\ \ \frac{۱}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

اگر معادله دیفرانسیل بشکل $y=f(x,y')$ باشد با فرض $y'=p$ و دیفرانسیل از طرفین معادلهٔ $y=f(x,p)$، دستگاه زیر را تشکیل داده و x و y را بدست می آوریم.

$$y=f(x,p)\ \ ,\ \ p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$$

مثال ۳.۱۷.۱. حل معادلهٔ $y=xy'^{۲}-\frac{۱}{۴}$.

حل. در این معادلهٔ درجهٔ دوم با جانشینی $y'=p$ و دیفرانسیل از طرفین معادله بر حسب x داریم:

$$\begin{aligned} y &= xp^{۲}-\frac{۱}{۴} \\ y'=p &= p^{۲}+۲xp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ ۰ &= p^{۲}-p+۲xp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ ۰ &= p\left(p-۱+۲x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) \end{aligned}$$

$p=۰$ نتیجه می دهد که $y=-\frac{۱}{۴}$ جواب خاص بوده و اگر $p-۱+۲x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=۰$ باشد، با حل این معادلهٔ تفکیک پذیر ، جواب عمومی $y=x+C\sqrt{x}+C^{۲}-\frac{۱}{۴}$ حاصل می گردد. □

۳.۱۷.۱ معادلات لاگرانژ و کلرو

شکل کلی معادلهٔ لاگرانژ بصورت $y=xf(y')+g(y')$ است که f و g توابعی از y' بوده و با فرض $p=y'$ معادله به شکل

$$y=xf(p)+g(p) \tag{۴.۱}$$

در می آید. برای حل معادله دو حالت وجود دارد:

الف) اگر $f(p)=p$ باشد (که در این حالت معادلهٔ (۴.۱) را معادلهٔ کلرو نامند) از عبارت $y=xp+g(p)$ نسبت به x مشتق می گیریم

$$y'=p+x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

چون $y' = p$ با ساده کردن عبارت داریم $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x+g'(p)) = ۰$ که یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = ۰ \quad , \quad \begin{cases} x = -g'(p) & , \\ y = xp + g(p) & . \end{cases}$$

در حالت نخست با فرض $p = p_۰$ جواب $y = p_۰x + C$ بدست می آید که با جایگذاری در معادله نخست $C = g(p_۰)$ بوده و لذا $y = p_۰x + g(p_۰)$ که جوابی غیرعادی است، حاصل می گردد. در حالت دستگاه نیز پارامتر p را حذف و جواب معادله را که پوش منحنی‌های جواب است بدست می‌آوریم.

ب) اگر $f(p) \neq p$ در این حالت نیز با مشتق از طرفین معادلهٔ لاگرانژ (۴.۱) نسبت به x می‌نویسیم:

$$y' = f(p) + xf'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

و

$$p - f(p) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(xf'(p) + g'(p))$$

و آن را بصورت معادلهٔ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}(p - f(p)) - xf'(p) = g'(p)$ یا

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{-f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

نوشته که معادلهٔ خطی مرتبه اول از x نسبت به p است. اگر $x = Cf_۱(p) + g_۱(p)$ جواب عمومی این معادله باشد، با حذف p از دستگاه

$$\begin{cases} x = Cf_۱(p) + g_۱(p) & , \\ y = xf(p) + g(p) & . \end{cases}$$

جواب عمومی معادلهٔ لاگرانژ حاصل می گردد.

مثال ۴.۱۷.۱. حل معادلهٔ لاگرانژ $y = ۲y'x + ۴(y')^۳$.

حل. با تغییر $p = y'$ معادله را بصورت $y = ۲px + ۴p^۳$ نوشته که طبق روش گفته شده چنین داریم:

$$\begin{aligned} y &= ۲px + ۴p^۳ \\ y' &= ۲\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}x + ۲p + ۱۲p^۲\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ p &= ۲\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}x + ۲p + ۱۲p^۲\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{۲}{p}x &= -۶p \quad \text{معادله خطی مرتبه اول} \\ x &= -۳p^۲ + \frac{C}{p^۲} \end{aligned}$$

برای حل دستگاه

$$\begin{cases} x = -۳p^۲ + Cp^{-۲} & , \\ y = ۲px + ۴p^۳ & . \end{cases}$$

مقدار p را از معادله اول بصورت

$$p^{۲}=\frac{۱}{۶}(-x\pm\sqrt{x^{۲}+۱۲C})$$

یافته و با جایگذاری در معادله دوم، عبارت

$$y=\frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۶}(-x\pm\sqrt{x^{۲}+۱۲C})}(۲x\pm\sqrt{x^{۲}+۱۲C})$$

جواب عمومی معادله می باشد. □

مثال ۵.۱۷.۱. مطلوبست حل معادلهٔ کلرو $y=xp+p^{۲}-۴p$ که $p=y'$.

حل. با مشتقگیری از طرفین معادله

$$\begin{aligned} y' &= p+xp'+۲pp'-۴p' \\ p &= p+xp'+۲pp'-۴p' \\ &\Rightarrow p'(x+۲p-۴)=۰ \\ &\Rightarrow \begin{cases} y=p_{۰}x+C & , \\ p=\frac{۱}{۲}(۴-x) & . \end{cases} \end{aligned}$$

مقدار $y=p_{۰}x+p_{۰}^{۲}-۴p_{۰}$ جواب غیرعادی معادله است و از دومی، با قرار دادن مقدار p در معادله اصلی و ساده کردن آن جواب خصوصی عبارتست از

$$y=-\frac{۱}{۴}(x-۴)^{۲}$$

□

مثال ۶.۱۷.۱. حل معادلهٔ لاگرانژ $y=x+۳(y')^{۲}-۲(y')^{۳}$.

حل. با مشتقگیری از طرفین معادلهٔ $y=x+۳p^{۲}-۲p^{۳}$ چنین می نویسیم:

$$y'=p=۱+۲p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-۲p^{۲}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

$$(p-۱)-(۲p-۲p^{۲})\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=۰$$

$$(p-۱)(۱+۲p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x})=۰$$

اگر $۱+۲p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=۰$ داریم $x+p^{۲}=C$ که با در نظر گرفتن معادلهٔ اصلی و حذف پارامتر p نتیجه می دهد $y=C-\frac{۲}{۳}(C-x)^{\frac{۳}{۲}}$ و یا $۹(C-y)^{۲}=۴(C-x)^{۳}$ که جواب عمومی معادله است. در حالت دوم که $p=۱$ پس $y=x+\frac{۱}{۳}$ که در واقع پوش منحنی های فوق محسوب می شود. □

تمرین ۱۸.۱. معادلات زیر، که در آنها $p = y'$ است را حل کنید.

$$\begin{array}{llll} (a) & y = px + p^{۲} - ۱ & , (b) & y = xp - p \\ (c) & xp^{۲} + ۲xp - y = ۰ & , (d) & y = p^{۲}e^{-x} + ۱ \end{array}$$

تمرین ۱۹.۱. تمرینات تکمیلی.

۱. معادلهٔ دیفرانسیل مختص به تابع $y = C_۱e^{x} + C_۲e^{۲x} + C_۳e^{۳x}$ را بنویسید.

۲. مرتبه، درجه و خطی بودن هر کدام از معادلات دیفرانسیل زیر را بیان کنید.

$$\begin{array}{llll} (a) & y^{(۵)} - ۲e^{x}y = xy & , (b) & (y' + ۱)(y'' + ۱) = x^{۲} \\ (c) & y''' - xe^{y} = ye^{x} & , (d) & \left(y^{(۴)}\right)^{۲} + y^{(۶)} + y''\cos x = ۰ \\ (e) & y'' + y' + y = \sin y' & , (f) & y' = x\ln y + y\ln x \end{array}$$

۳. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را با روش دلخواه حل کنید. در مواردی که شرط اولیه داده شده جواب خصوصی را هم بیابید.

$$\begin{array}{llll}
(۱) & ۲xy\,\mathrm{dx} + (x^{۲} + x^{۲}y^{۲})\,\mathrm{dy} = ۰ & , (۲) & y' + ۸y = ۵ \\
(۳) & ۳\rho\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\rho} \;,\; \rho(\dfrac{\pi}{۳}) = \dfrac{۱}{۲} & , (۴) & \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} - \dfrac{۲}{x}v = \dfrac{۴}{x^{۳}} \\
(۵) & (xy^{۲})\,\mathrm{dx} + (x^{۳}y^{۳} + x^{۲}y)\,\mathrm{dy} = ۰ & , (۶) & y' + \dfrac{۳}{x}y = x^{۷} \\
(۷) & (x^{۴}y^{۳} - y)\,\mathrm{dx} + (x^{۳}y^{۵} - x)\,\mathrm{dy} = ۰ & , (۸) & \dot{x} - \dfrac{۴}{t}x = ۶tx^{۳} \\
(۹) & x^{۲}y'\sin y = ۲x\cos y + ۴ & , (۱۰) & y' = \dfrac{۳x^{۲}y}{x^{۳} + ۲y^{۳}} \\
(۱۱) & (y + ۶x^{۵})\,\mathrm{dx} + (x - ۳y^{۲})\,\mathrm{dy} = ۰ & , (۱۲) & y' = -\dfrac{۲y^{۴} + ۱}{۴xy^{۳}} \\
(۱۳) & (۱ + \dfrac{y}{x}\tan\dfrac{y}{x})\,\mathrm{dy} = (\dfrac{y}{x} + \dfrac{y^{۲}}{x^{۲}}\tan\dfrac{y}{x})\,\mathrm{dx} & , (۱۴) & y' = ۳xy - x^{۳} \\
(۱۵) & y(x^{۲}y^{۲} + ۲)\,\mathrm{dx} + x(۲ - ۲x^{۲}y^{۲})\,\mathrm{dx} = ۰ & , (۱۶) & y' = \dfrac{\ln x}{۲xy} \\
(۱۷) & (x^{۲} + y^{۲} + ۱)\,\mathrm{dx} - (xy + y)\,\mathrm{dy} = ۰ & , (۱۸) & xy' + y = -\tan x \\
(۱۹) & (x + ۴)\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - y = ۲(x - ۲)^{۳} & , (۲۰) & \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} - \dfrac{۲}{x}v = -\dfrac{۱}{x^{۲}} \\
(۲۱) & y\ln y\,\mathrm{dx} + (x - \ln y)\,\mathrm{dy} = ۰ & , (۲۲) & y' = \dfrac{x^{۴}y^{۶} - y}{x} \\
(۲۳) & \mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy} = ۲\cos y\,\mathrm{dy} & , (۲۴) & \dot{x} = \dfrac{x^{۲} - t}{۲tx} \\
(۲۵) & (x + y^{۲} + ۹x^{۲})\,\mathrm{dy} - y\,\mathrm{dx} = ۰ & , (۲۶) & y' + xy = ۲xy^{۲} \\
(۲۷) & (xy - ۱)\,\mathrm{dx} + (x^{۲} - xy)\,\mathrm{dy} = ۰ & , (۲۸) & \mathrm{dy} + y\,\mathrm{dx} = y^{۳}e^{x}\,\mathrm{dx} \\
(۲۹) & t\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + y = t^{۲} \;,\; y(-۱) = ۲ & , (۳۰) & y' = \dfrac{۱ - ۳y}{x^{۲}}
\end{array}$$

(۳۱) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{۳t^۲ + x^۲}{۲xt}\ ,\ x(۲) = -۴$

(۳۲) $y' = \dfrac{-۳y}{۲x + xy^۳}$

(۳۳) $(x^۲ + y^۲ + x)\,dx + xy\,dy = ۰$

(۳۴) $\dot{x} = \dfrac{x + \ln t}{t}$

(۳۵) $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^۳ - \ln x)\,dy = ۰$

(۳۶) $y - xy' = \sqrt{۱ + y'^۲}$

(۳۷) $y = x + \dfrac{۱}{۲}y'^۲$

(۳۸) $y = ۲xy' + \dfrac{۱}{y'}$

(۳۹) $y\,dx + (۲x - ye^y)\,dy = ۰$

(۴۰) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{-x}{t(t^۲x + ۱)}$

(۴۱) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{۲xy}{۱ + x^۲} = ۰\ ,\ y(۲) = ۳$

(۴۲) $xy' + y = x^۳y^۲$

(۴۳) $y\sin\dfrac{x}{y} - (x\sin\dfrac{x}{y} + y)y' = ۰$

(۴۴) $y = \dfrac{xy'}{۲} + \dfrac{۲x}{y'}$

(۴۵) $y'^۲ = y + xy' - \dfrac{۱}{۲}x^۲$

(۴۶) $yy'^۲ + y = ۲xy'$

(۴۷) $(x^۲ - y^۴)y' = xy$

(۴۸) $y = (x + \ln y')y'$

(۴۹) $dx + (۲y + x + e^y)\,dy = ۰$

(۵۰) $y^۲e^yy' + xy' = y$

(۵۱) $(xy' - y)^۴ = (y')^۵$

(۶۴) $(۲xe^y + y^۳)y' = ye^y$

(۵۳) $y' + y = \dfrac{۱}{e^{۲x} + ۱}\ ,\ y(۰) = \dfrac{\pi}{۴}$

(۵۴) $x\,dy + y\,dx = x^۳\,dy$

(۵۵) $x^۲y'^۲ + xyy' = ۲y^۲$

(۵۶) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{۳}{x}y = x^۴y^{\frac{۱}{۳}}$

(۵۷) $y' + ۳t^۲y = ۳t^۲y^۲\ ,\ y(۰) = \dfrac{۱}{۲}$

(۵۸) $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{۱}{۲t}x = \dfrac{-x^۳}{۲}\cos t$

(۵۹) $y' + ۲y = y^۳(\sin x - \cos x)$

(۶۰) $\dfrac{dz}{dt} - \dfrac{۱}{۲t}z = -z^۵$

(۶۱) $y = x(y'^۲ - y') + (y' - ۳)$

(۶۲) $y' + \dfrac{y}{x} = x^۲y^۳$

(۶۳) $(x^۲ + y^۲)\,dx - xy\,dy = ۰$

(۶۴) $y' = (x - y - ۲)^۴$

(۶۵) $(۳x^۶ + ۴y - ۲)y' = x^۵$

(۶۶) $x(y' - ۱)(x + ۱) = y$

(۶۷) $xy(۱ + y'^۲) = (x^۲ + y^۲)y'$

(۶۸) $xy' = \sqrt{x^۲ + y^۲} - x$

(۶۹) $(۱ + x^۲)y' - ۲xy = (۱ + x^۲)^۲$

(۷۰) $y' - y\tan x = \sec x$

(۷۱) $y^۲y'^۲ - xyy'^۳ = y$

(۷۲) $xy' + ۲y = ۲xyy'$

(۷۳) $(۲xy^۴e^y + ۲y^۳x + y)\,dx + (x^۲y^۴e^y - x^۲y^۲ - ۳x)\,dy = ۰$

(۷۴) $(۲x - y - ۱)\,dx + (۳y - ۴x + ۲)\,dy = ۰$

(۷۵) $(x\sin y + y\cos y)\,dx + (x\cos y - y\sin y)\,dy = ۰$

(۷۶) $(۱ + e^y)\csc^۳ x\,dx + e^y\cot x\,dy = ۰$

(۷۷) $(۲x + ۳y - ۶)\,dx + (۴x + ۶y - ۱۵)\,dy = ۰$

(۷۸) $(۶x^۵ - ۱۲x^۲y^۲ - ۹x^۲)\,dx + (۲x^۳y - ۴y^۳)\,dy = ۰$

(۷۹) $xy(xy^۲ + ۱)\,dy = dx$

(۸۰) $y + \sin x\cos^۲(xy)\,dx + (x + \sin y\cos^۲(xy))\,dy = ۰$

۴. معادلهٔ غیرخطی $y' + py = qy\ln y$ دارای شکلی شبیه معادلهٔ برنولی است که در آن p و q توابعی از x—اند. این معادله را با تغییر متغیر $y = e^z$ می توان به معادلهٔ خطی مرتبه اول تبدیل نمود. این تبدیل را انجام داده و پس از یافتن شکل نهائی معادلات زیر را حل نمائید.

$$
\begin{array}{llcll}
(a) & y' + ۲y = ۳y\ln y & , & (b) & xy' + ۴x^۲\sin^۲ x.y = y\ln y \\
(c) & (x^۲+۱)y' + ۴xy = ۴xy\ln y & , & (d) & xy' - ۵x^۳y = -۲y\ln y
\end{array}
$$

۵. نشان دهید که $y = -x$ یک جواب غیرعادی معادلهٔ $yy' + xy = -xy' - y^۲$ است.

۶. معادلهٔ برنولی (۲.۱) را برای $\beta \neq ۱$ در نظر بگیرید. با استفاده از معادلهٔ (۳.۱) نشان دهید جواب نهائی معادلهٔ برنولی عبارتست از

$$y = \left(\frac{(۱-\beta)\int e^{(۱-\beta)\int p(x)\,\mathrm{d}x} q(x)\,\mathrm{d}x + C}{e^{(۱-\beta)\int p(x)\,\mathrm{d}x}} \right)^{\frac{۱}{۱-\beta}}$$

در مسائل ساختنی زیر، با در نظر گرفتن شکل تقریبی تابع و مشتق در نقطه تماس بعنوان شیب خط مماس و نکات کمکی دیگر در مسئله، منحنی مورد نظر را بیابید.

۷. معادلهٔ منحنی را بیابید که در آن پاره خط مماس محدود به محورهای مختصات، برابر باشد با فاصلهٔ نقطهٔ تماس از مبداء مختصات.

۸. مطلوبست معادلهٔ منحنی که در آن پاره‌خط قائم در هر نقطهٔ منحنی که محدود به محور های مختصات است در همین نقطه نصف شود.

۹. معادلهٔ منحنی که پاره خط مماس محدود به محورهای مختصات برابر مقدار ثابتی باشد.

۱۰. معادلهٔ منحنی را بیابید که شیب خط مماس در هر نقطهٔ آن، برابر مجموع مختصات نقطه تماس باشد.

۱۱. مطلوبست معادلهٔ منحنی که فاصله یک نقطه مفروض از مماسهای بر آن مقدار ثابتی باشد.

۱۲. مطلوبست معادلهٔ منحنی که در آن، مساحت مثلثی که از مماس بر هر نقطهٔ دلخواه آن با محورهای مختصات می سازد مقدار ثابتی باشد.

۱۳. معادلهٔ منحنی را بیابید که پاره خط مماس بر آن، محدود به محورهای مختصات در نقطه تماس نصف شده باشد.

۱۴. معادلهٔ منحنی را بیابید که مجموع پاره خطهائی که مماس بر هر نقطهٔ آن روی محورهای مختصات بوجود می آورد عددی ثابت باشد.

۱۵. معادلهٔ منحنی که زاویهٔ بین مماس و شعاع حامل نقطهٔ تماس آن مقدار ثابتی باشد.

۱۶. معادلهٔ منحنی را بیابید که پاره خطی که مماس روی محور طولها جدا می کند مساوی طول این پاره خط باشد.

۱۷. معادلهٔ منحنی را بیابید چنانکه مساحت مثلثی که اضلاع آن عبارتند از خط مماس، شعاع حامل نقطه ی تماس و محور طولها، عددی ثابت باشد.