# فصل ۱
# مقدمات

**نگارش: تابستان ۱۳۸۹**
**آخرین ویرایش: ۲۵ مهر ۱۳۹۸**

مانند یک معادلهٔ معمولی که رابطه‌ای میان اعداد و متغیرهاست، یک معادلهٔ دیفرانسیل نیز رابطه و معادله ای میان یک تابع و مشتقاتش می باشد. شکل کلی یک معادلهٔ دیفرانسیل بصورت

$$f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = ۰ \qquad (۱)$$

است که $y$ تابعی از $x$ و $y'$ و $y''$ و . . . مشتقات پیاپی آن بر حسب $x$ هستند. این رابطه می تواند شامل توابع مقدماتی و مقادیر ثابت نیز باشد. همچنان که در معادلهٔ معمولی بدنبال «عددی» به نام ریشهٔ معادله هستیم که در معادله صدق کند، در معادلهٔ دیفرانسیل نیز بدنبال «تابعی» هستیم که در معادله صدق نماید. بنابراین در این نوع معادلات، مهم یافتن تابعی مانند $y$ می باشد که در معادلهٔ دیفرانسیل صدق کند که این $y$ را جواب معادله دیفرانسیل نامیم. از آنجا که یک روش کلی برای حل تمام معادلات دیفرانسیلی وجود ندارد، با بررسی و رده بندی معادلات مختلف و انواع گوناگون آنها، به حل اینگونه مسائل می پردازیم. علاوه بر این برخی روشها نیز ترکیبی از روشهای قبلی خواهد بود.

## ۱.۱ معادله دیفرانسیل چیست؟

معادله ای که شامل حداقل یکی از مشتقات یک تابع مانند $y$ (اعم از مشتق اول، دوم، سوم،...) باشد یک معادلهٔ دیفرانسیل است، نظیر

$$y' + ۲y = ۴x + ۱$$
$$y - y'' + ۲x = ۴y' + ۳$$

که دو معادلهٔ دیفرانسیل محسوب می شوند.

**تعریف ۱.۱.۱.** هر معادله که شامل حداقل یکی از مشتقات یک تابع باشد را معادلهٔ دیفرانسیل نامیم.

بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل حتماً باید شامل عبارت مشتق یا عبارت دیفرانسیلی باشد تا معادلهٔ دیفرانسیل به حساب آید. بخاطر داشته باشید که $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ مشتق اول، $y'' = \frac{\mathrm{d}^۲y}{\mathrm{d}x^۲}$ مشتق دوم و . . . و $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ مشتق $n$–ام تابع $y$ هستند. همچنین ممکن است مانند فیزیکدانان، از نماد $\dot{y}$ برای مشتق اول و از $\ddot{y}$ بجای مشتق دوم استفاده شود. نوع معادله دیفرانسیل به تعداد متغیرهای مستقل مرتبط است:

**تعریف ۲.۱.۱.** اگر یک معادلهٔ دیفرانسیل تنها یک متغیر مستقل داشته باشد، آنرا یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی[۱] و معادله‌ای که دارای مشتقات جزئی (به شکل $\partial x$ و $\partial y$) بوده که لزوماً شامل چند متغیر مستقل است را معادلهٔ دیفرانسیل جزئی[۲] نامیم.

برای مثال معادلهٔ

$$(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^۳ + ۴x\frac{\mathrm{d}^۲y}{\mathrm{d}x^۲} - ۲y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ۲xy - ۳$$

یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی و

$$\frac{\partial x}{\partial y} = x - ۲y\frac{\partial x}{\partial z}$$

یا

$$u_x = v_y$$

معادلات دیفرانسیل جزئی هستند. استفاده از کلمه «معمولی» جهت تمایز با معادله از نوع جزئی است. از اینجا به بعد، بحث روی معادلات دیفرانسیل معمولی به شکل (۱) را پی می‌گیریم که در آنها غالباً $x$ متغیر مستقل و $y(x)$ متغیر تابع محسوب شده و بجای $y(x)$ تنها به نوشتن $y$ بسنده می‌کنیم.

### ۱.۱.۱ مرتبه، درجه و خطی بودن یک معادله دیفرانسیل

در بسیاری از مسائل معمول علوم، می توان مرتبه، درجه و خطی بودن یک معادلهٔ دیفرانسیل را تعیین نمود:

**تعریف ۳.۱.۱.** مرتبهٔ یک معادله دیفرانسیل عبارتست از مرتبهٔ بزرگترین مشتق ظاهر شده در معادله. بزرگترین توان برای مرتبهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل را درجهٔ معادلهٔ دیفرانسیل نامند و خطی بودن معادلهٔ دیفرانسیل به این معناست که معادله بصورت

$$f_n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} + f_{n-۱}\frac{\mathrm{d}^{n-۱}y}{\mathrm{d}x^{n-۱}} + \cdots + f_۱\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f_۰ y = g \qquad (۲)$$

باشد که در آن $f_i$ها و $g$ توابعی از $x$ هستند و هر معادله‌ای که تمام مشتقات آن از توان یک باشند، خطی است.

در حقیقت یک معادله دیفرانسیل وقتی برای ما مفهوم دارد که آنرا بتوان بصورت یک چندجمله ای با ضرایبی از توابع بر حسب خودش و مشتقاتش نوشت.

[۱] Ordinary differential equation (ODE)
[۲] Partial differential equation (PDE)

**مثال ۴.۱.۱.** مرتبه، درجه و خطی بودن معادلات دیفرانسیل زیر را ملاحظه نمائید:

| | |
|---|---|
| $y''' - 6xy' = 2 - 3e^x$ | مرتبه ۳، درجه ۱ و خطی. |
| $y + 9x(y')^2 = e^x - 5$ | مرتبه ۱، درجه ۲ و غیرخطی (مشتق دارای توان ۲) |
| $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - (\sin x)y = 0$ | مرتبه ۲، درجه ۱ و خطی |
| $y''y - 2x + y' = e^x$ | مرتبه ۲، درجه ۱ و غیرخطی |
| $3t(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^3 + 4(\sin t)y^4 - 2 = 0$ | مرتبه ۱، درجه ۳ و غیرخطی |
| $t^2\dfrac{d^3y}{dt^3} - \sin t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \cos(ty) = 0$ | مرتبه ۳، درجه ندارد و غیرخطی |
| $5x\dot{y} - 4(\dot{y})^7y = x$ | مرتبه ۱، درجه ۷ و غیرخطی است |

### ۲.۱.۱ جواب معادله دیفرانسیل

تابع مفروضی که با مشتقاتش در یک معادلهٔ دیفرانسیل صدق می کند را جواب معادلهٔ دیفرانسیل یا یک انتگرال معادله گوئیم. تعبیر عبارت دوم چنین است که مانند عمل پادمشتقگیری در اینجا نیز حاصل معادله به یک نوع عمل انتگرالگیری ختم می شود.

می توان دید که تابع $y = x^2 + 3$ جوابی برای معادله دیفرانسیل $y' - 2x = 0$ محسوب می شود.

یک جواب معادله دیفرانسیل باید روی یک بازه $(a, b)$ (احتمالاً نامتناهی) تعریف شده و روی آن پیوسته و مشتقپذیر باشد و بعلاوه با جایگذاری آن در معادله دیفرانسیل، در آن صدق نماید. جواب ممکن است تابعی صریح یا ضمنی بوده و جواب معادله دیفرانسیل لزوماً یکتا نیست.

**مثال ۵.۱.۱.** بررسی کنید که $y = \dfrac{1}{x}$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y' + y^2 = 0$ است.

**حل.** با مشتق گیری از $y$ داریم $y' = \dfrac{-1}{x^2}$ و با جایگذاری

$$y' + y^2 = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0$$

برای هر $x \neq 0$ برقرار است. لذا $y = \dfrac{1}{x}$ در هر بازه‌ای که شامل مبدأ نباشد جواب معادلهٔ دیفرانسیل خواهد بود. □

**مثال ۶.۱.۱.** بررسی کنید که $y_1 = e^{-2x}$ و $y_2 = e^{-3x}$ جوابهائی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 5y' + 6y = 0$ هستند.

**حل.** با مشتق گیری از $y_1$ داریم $y_1' = -2e^{-2x}$ و $y_1'' = 4e^{-2x}$ که با جایگذاری در معادله چنین بدست می آید:

$$y_1'' + 5y_1' + 6y_1 = 4e^{-2x} - 10e^{-2x} + 6e^{-2x} = 0$$

برای $y_2$ نیز می نویسیم $y_2' = -3e^{-3x}$ و $y_2'' = 9e^{-3x}$ و با جایگذاری در معادله

$$y_2'' + 5y_2' + 6y_2 = 9e^{-3x} - 15e^{-2x} + 6e^{-3x} = 0$$

پس $y_1 = e^{-2x}$ و $y_2 = e^{-3x}$ در فاصلهٔ $(-\infty, +\infty)$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل مذکور خواهند بود. □
دو جواب $y_1 = e^{-2x}$ و $y_2 = e^{-3x}$ را جواب های اولیهٔ مستقل معادله نامیم. آنچه در مثال قبل دیده می شود آنست که معادله دیفرانسیل ممکن است دارای دو یا چند جواب اولیه باشد و براحتی می توان دید که بازای اعداد دلخواهی مانند $C_1$ و $C_2$،

$$y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

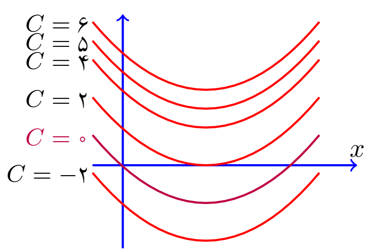
نیز جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 5y' + 6y = 0$ است. این جواب معادلهٔ دیفرانسیل که شامل یک یا چند ثابت اختیاری است را جواب عمومی معادله دیفرانسیل گوئیم. مثلاً $y = Ce^{2x} + 3x$ یک جواب عمومی برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 3 - 6x$$

است، زیرا بازای هر ثابت عددی $C$ در آن صدق می کند. اگر جواب عمومی بازاء پارامتر مشخصی یک جواب اولیه باشد، آنرا یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل گوئیم. مثلاً تابع $y = Cx + C^2$ برای هر ثابت دلخواه $C$ در معادلهٔ $y - (y')^2 = xy'$ صدق می کند، پس جواب عمومی آن خواهد بود [3]. از طرفی $y = \frac{1}{4}Cx^2$ تنها برای $C = -1$ در این معادله دیفرانسیل صدق می کند بنابراین $y = -\frac{1}{4}x^2$ یک جواب خصوصی معادله است. باید گفت که جواب خصوصی از جواب عمومی تحت شرایط ویژه‌ای بدست می آید. به مثال زیر توجه کنید:

**مثال ۷.۱.۱.** مطلوبست حل معادلهٔ دیفرانسیل $y' = 2x - 3$.

**حل.** از آنجائی که $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ است با جایگذاری این مقدار در معادله داریم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 3$ و از آنجا $dy = (2x-3)dx$ با انتگرالگیری از طرفین $\int dy = \int (2x-3)dx + C$ و توابع $y = x^2 - 3x + C$ برای هر ثابت دلخواه $C$ جواب عمومی معادله بوده که دسته‌ای از منحنی‌ها بشکل ۱.۱ زیر است. اگر $C = 0$ تابع $y = x^2 - 3x$ یکی از جواب های خصوصی معادله خواهد بود. □




شکل ۱.۱: شکل چند عضو از دسته منحنی مثال ۷.۱.۱

یک معادله ی دیفرانسیل ممکن است جواب نداشته باشد نظیر معادله ی $y'^2 + 1 = 0$ و یا در برخی حالات، جواب حاصل از خود معادله بدست نیامده باشد و بعبارتی جوابی خصوصی معادله بدون هیچ مقدار $C$یی از جواب عمومی

[3] این نمایش از جواب معادله که به شکل $y = f(x)$ است جواب صریح نامیده می شود ولی همیشه تمام جوابها صریح نبوده و ممکن است در شکل $f(x, y, C) = 0$ ظاهر گردند که جواب ضمنی نامیده شده و با مشتقگیری ضمنی در معادله صدق خواهند کرد.

بدست آید، ولی در معادله صدق نماید. اینگونه جوابی را جواب غیرعادی یا جواب منفرد معادله نامیم. برای مثال معادله ی $y'^{۲} - ۴xy' + ۴y = ۰$ دارای جواب منفرد $y = x^{۲}$ است و بعداً خواهیم دید که تمام جوابهای معادله $y = Cx - C^{۲}$، بر این جواب منفرد مماسند و نیز اینکه این جواب منفرد از حل معادله حاصل نمی شود. قابل ذکر اینکه جوابهای منفرد بندرت در مسائل مهندسی دیده می شوند.

بطورکلی جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول دارای یک پارامتر روی جواب اولیه و مرتبه دوم دارای دو پارامتر روی دو جواب اولیه مستقل است. بهمین صورت جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ $n$، دارای $n$ جواب اولیه مستقل است و می توان گفت که تعداد پارامترها برابر مرتبهٔ معادله دیفرانسیل است. مفهوم استقلال جوابها را در فصول بعد توضیح خواهیم داد.

### ۳.۱.۱ مقادیر اولیه و مقادیر مرزی

جهت حذف پارامتر در جواب عمومی و بدست آوردن جواب خصوصی، معادله را تحت شرایطی بیان می کنند. در بیشتر حالات جواب عمومی معادله بیان می کند که معادله دارای بی نهایت جواب خصوصی است و چون هر منحنی جواب، از نقطهٔ خاصی می گذرد این نقاط را بعنوان شروطی تحت عنوان مقادیر اولیه و مقادیر مرزی بیان می کنیم. مقادیر اولیه شرایطی هستند که با یک طول بیان می شوند، مانند:

$$y(۴) = ۰ \ , \ y'(۴) = ۳ \ , \ y''(۴) = -۲$$

و مقادیر مرزی شرایطی را گویند که برای طول های متفاوت بیان می گردند، مانند:

$$y(۴) = ۶ \ , \ y(۲) = -۱ \ , \ y'(۴) = ۳$$

فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل زیر با مقادیر اولیه داده شده است:

$$y'' - ۲y' - ۳y = ۰ \ , \ y(۰) = ۱ \ , \ y'(۰) = -۵$$

جواب عمومی این معادله برای $A$ و $B$ های دلخواه بصورت $y(x) = Ae^{-x} + Be^{۳x}$ می باشد که با قرار دادن مقادیر اولیهٔ داده شده در این جواب عمومی و بدست آوردن $A$ و $B$ بصورت زیر

$$\begin{cases} y(۰) = ۱ \Rightarrow Ae^{۰} + Be^{۰} = ۱, \\ y'(۰) = -۵ \Rightarrow -Ae^{۰} + ۳Be^{۰} = -۵. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = ۱, \\ -A + ۳B = -۵. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = ۲, \\ B = -۱. \end{cases}$$

جواب خصوصی $y(x) = ۲e^{-x} - e^{۳x}$ حاصل می شود. مسئلهٔ یافتن جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل که در یک یا چند شرط اولیه صدق کند یک مسئلهٔ مقدار اولیه نام دارد.

**مثال ۸.۱.۱.** معادلهٔ دیفرانسیل $y' = y(۱ - \sin t)$ را با مقدار اولیه $y(۰) = ۱$ حل کنید.

**حل.**

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} &= y(۱ - \sin t) \\ \frac{\mathrm{dy}}{y} &= (۱ - \sin t)\,\mathrm{dt} \\ \int \frac{\mathrm{dy}}{y} &= \int (۱ - \sin t)\,\mathrm{dt} \\ \ln y &= t + \cos t + C \ , \ C = \ln C_{۱} \\ y(t) &= C_{۱} e^{t + \cos t} \end{aligned}$$

و جواب خصوصی بازای $y(\circ)=۱$ عبارتست از $y(t)=e^{-۱+t+\cos t}$. □

برای حل $\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{dx}+\frac{\partial g}{\partial y}\,\mathrm{dy}=\circ$ با شرط اولیهٔ $y(x_\circ)=y_\circ$ می نویسیم:

$$\begin{aligned}\int_{x_\circ}^{x}\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{dx}+\int_{y_\circ}^{y}\frac{\partial g}{\partial y}\,\mathrm{dy} &= \circ\\ f(x)-f(x_\circ)+g(y)-g(y_\circ) &= \circ\\ f(x)+g(y) &= f(x_\circ)-g(y_\circ)\end{aligned}$$

در این روش حل، جواب خصوصی را بطور مستقیم می توان پیدا نمود.

**مثال ۹.۱.۱.** مطلوبست حل $\cos x\,\mathrm{dx}+\sin y\,\mathrm{dy}=\circ$ با شرط اولیهٔ $y(\circ)=\circ$.

**حل.** می نویسیم:

$$\begin{aligned}\int_{\circ}^{x}\cos x\,\mathrm{dx}+\int_{\circ}^{y}\sin y\,\mathrm{dy} &= \circ\\ \sin x-\circ-\cos y+۱ &= \circ\\ \sin x-\cos y &= -۱\end{aligned}$$

که جواب خصوصی است. □

**تمرین ۲.۱.** .

۱. تحقیق کنید که آیا توابع زیر جواب معادله دیفرانسیل مربوطه هستند یا خیر.

$$\begin{array}{lll}(a) & y=C_۱\sin x+C_۲\cos x+۱ & ;\quad y''+y=۱\\ (b) & y=Ce^{۲x} & ;\quad y'-۲y=\circ\\ (c) & y^۲=x^۲+C & ;\quad yy'=x\\ (d) & y=C\cosh ۳x & ;\quad y''+۹y=\circ\\ (e) & y=۲+\frac{C}{x} & ;\quad xy'+y=۲\\ (f) & y^۲=e^{Cx} & ;\quad xy'=y\ln y\\ (g) & y=x\tan(\ln x+C) & ;\quad x^۲y'-xy=x^۲+y^۲\\ (h) & y=\ln x+C & ;\quad xy'=۱\end{array}$$

۲. معادلات دیفرانسیل زیر را حل نموده و جواب عمومی آنها را بیابید.

$$\begin{array}{llll}(a) & y'=۲ & ,\ (b) & y'^۲=۴\\ (c) & y''=e^x & ,\ (d) & y''=۵\\ (e) & y'=۶x+\sin x & ,\ (f) & y'=y\tan ۲x\\ (g) & y''=\sin x & ,\ (h) & xy'=y+x^۲\cos x\\ (i) & ۳x^۲\,\mathrm{dx}+۴y\,\mathrm{dy}=\circ & ; & y(۱)=۲\end{array}$$

۳. جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $(y')^۲ + y^۲ = ۰$ بیان کنید. آیا می توانید معادلهٔ دیفرانسیلی مثال بزنید که دارای جواب نباشد؟

۴. مقدار $k$ را طوری محاسبه کنید که $y = x^۵$ جواب معادله دیفرانسیل $xy' = ky$ باشد.

۵. معادله دیفرانسیلی به صورت $ay'' + by' + cy = ۰$ بیابید که $y = \sin x$ یک جواب آن باشد.

## ۳.۱ منحنی های جواب

از آنچه گفته شد درمی یابیم که جواب عمومی یک معادله برای مقادیر بیشماری از اعداد، جواب های خصوصی متعددی را نشان می دهد. این جواب های بیشمار، که در شکل تابع $f(x, y, C) = ۰$ بهمراه پارامتر $C$ ظاهر می شوند، باعث می شود تا با جایگذاری مقادیر مختلفی از اعداد حقیقی بجای $C$ منحنی خاصی حاصل گردد و بعبارتی $f(x, y, C) = ۰$ نشان دهندهٔ تعداد خاصی منحنی مختص به معادله است. این تعداد منحنی جواب را با نام دسته منحنی یا خانوادهٔ منحنی ها می شناسیم که گاهی اوقات نام منحنی های انتگرال بخود می گیرد. شکل ۱.۱ دسته ای از منحنی ها را نشان می دهد که همگی از جواب عمومی $y = x^۲ - ۳x + C$ حاصل شده‌اند. بدیهی است که «هر جواب خصوصی تنها یکی از این منحنی ها خواهد بود» و این جواب خصوصی تحت مقدار اولیه، جوابی یکتاست.
از طرفی دیگر با حذف $C$ در دسته منحنی $f(x, y, C) = ۰$ می توان معادلهٔ دیفرانسیلی بدست آورد که به تنهائی گویای این خانواده باشد. برای بدست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنی $f(x, y, C) = ۰$، با محاسبهٔ مشتق $\frac{d}{dx} f(x, y, C) = ۰$ و حذف $C$ در این دو معادله، می‌توان معادلهٔ دیفرانسیلی مربوطه را بدست آورد. بنابراین باید گفت که «هر معادلهٔ دیفرانسیل، معادلهٔ یک دسته از منحنی‌هاست».

**مثال ۱.۳.۱.** معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنی های $y = ۴x^۲ + Cx$ را بدست آورید.
**حل.** با مشتق از تابع $y' = ۸x + C$ و حذف $C$ بین دو معادله داریم:

$$C = y' - ۸x \Rightarrow y = ۴x^۲ + (y' - ۸x)x \Longrightarrow xy' - y = ۴x^۲$$

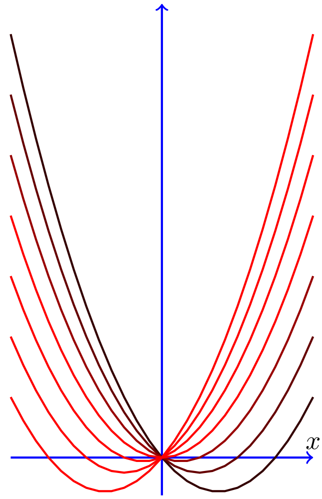
شکل ۳.۱ این دسته منحنی را نشان می دهد. □

کلی تر اینکه برای یافتن معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنی هائی با $n$ پارامتر، با محاسبهٔ $n$ مشتق متوالی از خانواده می توان دستگاه $n + ۱$ معادله و $n$ پارامتر مجهول نوشت و پارامترها را بین آنها حذف نمود.

**مثال ۲.۳.۱.** معادلهٔ یک دسته دلگون در مختصات قطبی به شکل $\rho = C_۱ + C_۲ \cos\theta$ است. معادله دیفرانسیل این دسته منحنی را بنویسید.
**حل.** با دو بار مشتقگیری پیاپی از $\rho$ نسبت به $\theta$ و حذف پارامترها چنین می یابیم:

$$\begin{cases} \rho' = -C_۲ \sin\theta, \\ \rho'' = -C_۲ \cos\theta. \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho'}{\rho''} = \frac{-C_۲ \sin\theta}{-C_۲ \cos\theta} \Rightarrow \rho' - \rho'' \tan\theta = ۰$$

چند عضو از این دسته در شکل ۳.۱ نموده شده است. □




شکل ۲.۱: شکل چند عضو از دسته منحنی مثال ۱.۳.۱

### ۱.۳.۱ مسیرهای متعامد بر یک دسته منحنی

اگر بخواهیم بر هر منحنی از خانوادهٔ منحنی های $f(x,y,C)=0$ یک منحنی دیگر عمود کنیم، خانواده‌ای پدید می آید که دسته مسیرهای متعامد نام می گیرد. برای یافتن دسته مسیرهای متعامد، ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی مربوطه را بصورت $F(x,y,y')=0$ پیدا نموده و سپس بجای $y'$ مقدار $\dfrac{-1}{y'}$ را قرار داده تا دسته مسیرهای متعامد بدست آید. بدین ترتیب معادلهٔ دسته مسیرهای متعامد در شکل $F(x,y,\dfrac{-1}{y'})=0$ ظاهر خواهند شد.

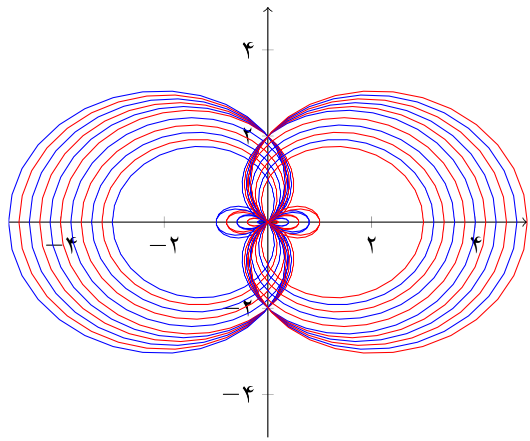
**مثال ۳.۳.۱.** دسته مسیرهای متعامد خانواده منحنی مثال ۱.۳.۱ را بیابید.

**حل.** چون $xy'-y=4x^2$ با جانشینی مورد نظر داریم $x\dfrac{-1}{y'}-y=4x^2$ و با ساده کردن آن، معادلهء دسته مسیرهای متعامد بصورت $4x^2y'+yy'+x=0$ بدست می آید. □

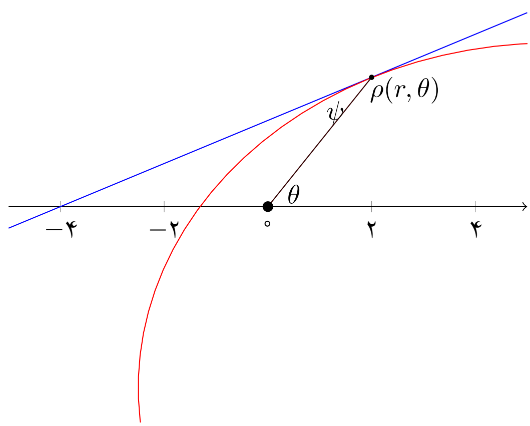
در حالتی که دسته منحنی ها در مختصات قطبی $(\rho,\theta)$ داده شده باشد، اگر $\psi$ زاویهٔ بین شعاع حامل و خط مماس باشد، پس

$$\tan\psi=\rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}$$

و برای یافتن مسیرهای متعامد بر دسته منحنی باید مقدار $\dfrac{-1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$ را جایگزین طرف راست نمائیم. بعبارتی ساده تر برای یافتن دسته مسیرهای متعامد بر یک دسته منحنی در مختصات قطبی، کافیست بجای $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$ مقدار $-\rho^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}$ را قرار دهیم.




شکل ۳.۱: نمودار چند عضو از دسته منحنی مثال ۲.۳.۱




شکل ۴.۱: منحنی در مختصات قطبی و وضعیت شعاع حامل و مماس بر آن

**مثال ۴.۳.۱.** معادلهٔ دسته مسیرهای متعامد بر خانوادهٔ منحنی های $\rho = C(۱ + \sin\theta)$ را بیابید.

**حل.** از $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = C\cos\theta$ و جانشینی $C = \frac{\rho}{۱ + \sin\theta}$ معادله دیفرانسیل دسته منحنی بصورت

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\rho\cos\theta}{۱ + \sin\theta}$$

حاصل می شود. منحنی های متعامد با جایگذاری $-\rho^{۲}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}$ بجای $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$ بدست می آیند پس:

$$-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}=\frac{\cos\theta}{\rho(۱+\sin\theta)}$$

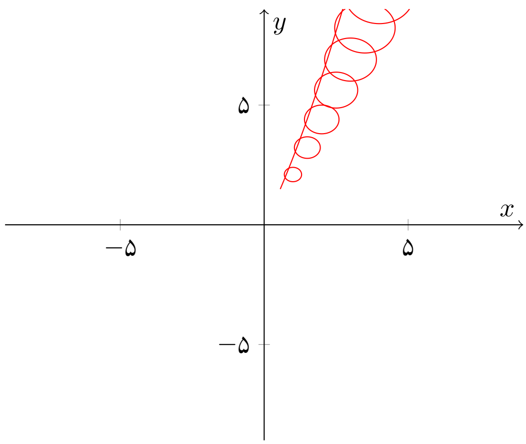
و بالاخره با ساده کردن معادلهء دسته مسیرهای متعامد بصورت

$$\frac{d\rho}{\rho}+(\sec\theta+\tan\theta)d\theta=۰$$

حاصل می شود. □

### ۲.۳.۱ پوش‌یک‌دسته‌منحنی

هنگامی که یک منحنی بر دسته ای از منحنی ها مماس باشد گوئیم این منحنی پوش دسته منحنی است. گیریم که $f(x,y,C)=۰$ دسته منحنی مورد نظر است، برای یافتن منحنی $\phi$ که بر تمام منحنی های این خانواده مماس باشد کافیست پارامتر $C$ را بین معادلات $f(x,y,C)=۰$ و مشتق آن $\frac{d}{dC}f(x,y,C)=۰$ حذف نمائیم. شکل زیر پوش یک دسته دایره را نشان می دهد.




شکل ۵.۱: پوش یک دسته دایره

**مثال ۵.۳.۱.** پوش دسته منحنی $y=۲C(۱-Cx)$ را بیابید.

**حل.** معادلهٔ $f(x,y,C)=۰$ و مشتق آن $\frac{d}{dC}f(x,y,C)=۰$ عبارتند از

$$\begin{cases} f(x,y,C)=y-۲C+۲C^{۲}x=۰,\\ \frac{d}{dC}f(x,y,C)=-۲+۴Cx=۰.\end{cases}$$

پس از یافتن $C = \frac{۱}{۲x}$ از معادلهٔ دوم و جایگذاری در معادلهٔ اول خواهیم دید که

$$y - ۲\frac{۱}{۲x} + ۲(\frac{۱}{۲x})^{۲}x = ۰$$

و با ساده کردن جواب، منحنی پوش $y = \frac{۱}{۲x}$ خواهد شد. □

**تمرین ۴.۱. تمرینات تکمیلی.**

۱. مرتبه و درجهٔ معادلات دیفرانسیل زیر و نیز خطی بودن آنها را تعیین کنید.

$$\begin{array}{llcll} (a) & (y')^{۳} + xy'' - ۴x^{۴} = ۲y & , & (b) & y' + (۲x-۱)y = x^{۳}y^{۴} \\ (c) & y' + y'' + y''' = ۰ & , & (d) & \rho''' = ۰ \\ (e) & \rho\theta - \rho\rho' = (\rho')^{۲} & , & (f) & \sin(xy^{۲}) = y'' - ۱ \end{array}$$

۲. مرتبه و درجه ی معادله دیفرانسیل $x^{۳} + ۳y'' = \sqrt{۱ + y'^{۲}}$ چیست؟

۳. تحقیق کنید که برای معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + y = ۰$ تابع $y(x) = A\sin x + B\cos x$ بازای هر $A$ و $B$ دلخواه جواب عام معادله بوده و سپس جواب خاص آنرا بازای مقادیر مرزی $y'(\pi) = ۳$ و $y(۰) = -۲$ بدست آورید.

۴. معادلهٔ دیفرانسیل هرکدام از دسته منحنی های زیر را بیابید. نموداری از هر خانواده را رسم کرده و معادله دیفرانسیل دسته مسیرهای متعامد بر آنها را نیز پیدا نمائید.

$$\begin{array}{llcll} (a) & y = Cx^{۲} & , & (b) & x^{۲} + y^{۲} = Cy \\ (c) & y = \frac{C}{x^{۲}} & , & (d) & y^{۲} = ۲x^{۲} + Ce^{x} - ۱ \\ (e) & y^{۲} = x^{۲} + C_{۱}e^{x} + C_{۲} & , & (f) & \rho = \frac{C}{\sin\theta} \\ (g) & y = C_{۱}e^{۳x} + C_{۲}e^{-۲x} & , & (h) & y = C_{۱}x^{۳} + x^{۲} \\ (i) & \rho = C_{۱}\tan\theta + C_{۲} & , & (j) & \rho = C\theta^{۲} \\ (k) & (x-C)^{۲} + y^{۲} = C^{۲} & , & (\ell) & y = C_{۱}x^{۲} - C_{۲} \\ (m) & y = C_{۱}(x - C_{۲})^{۲} & , & (n) & \rho^{۲} = C\sin ۲\theta \end{array}$$

۵. منحنی را از دسته منحنی $y = C_{۱} + C_{۲}x^{۲}$ بیابید که دارای مقادیر مرزی $y(۰) = ۲$ و $y'(۱) = ۴$ باشد.

۶. منحنی از خانواده $y = C_{۱}e^{۲x} + C_{۲}e^{-x}$ بیابید که از نقطهٔ $(۰, ۲)$ گذشته و شیب آن در این نقطه برابر $-۲$ باشد.

۷. منحنی از خانواده $y = C_{۱}e^{x} + C_{۲}x$ بیابید که از نقطهٔ $(۰, ۱)$ گذشته و $y'(۰) = ۴$ باشد.

۸. نشان دهید که تابع $y = \tan x + \sec x$ در فاصلهٔ $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $۲y' = y^۲ + ۱$ است.

۹. نشان دهید که تابع $y = e^{at} \sin bt$ بازای هر $a$ و $b$ حقیقی دلخواه، جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل زیر است.

$$y'' - ۲ay' + (a^۲ + b^۲)y = ۰$$

۱۰. با روش گفته شده در مثال۸.۱.۱ معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{llll} (a) & y' = y(۱ - \cos t) & ,\ (b) & y' = y^۲(۱ + x^۲) \\ (c) & y' = y \cot t & ,\ (d) & y' = y \ln y \tan x \end{array}$$

۱۱. معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به تمام خطوط واقع در صفحهٔ مختصات را پیدا کنید.

۱۲. معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به تمام دوایر بمرکز مبداء مختصات را بیابید.

۱۳. معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای قائم بر دسته‌ای از بیضی ها را پیدا کنید که مرکز آنها مبداء مختصات و قطر اطول آنها برابر مقدار ثابت $۲k$ است. سپس با روش گفته شده در مثال۸.۱.۱ معادله حاصل را حل کنید.

۱۴. پوش دسته منحنی های زیر را پیدا نمائید.

$$\begin{array}{llll} (a) & ۴x^۲ - xy = C(x - y) - C^۲ & ,\ (b) & x^۲y - x^۲ + y = (x - C)^۲ \\ (c) & ۲C - ۵y = ۲C^۲x & ,\ (d) & y = \dfrac{x}{C} + \dfrac{C}{x} \end{array}$$

۱۵. پوش خانواده ای از خطوط راست را بیابید که فاصله ی بین $x$ و $y$ در تقاطع محورهایشان برابر ثابت $\alpha$ باشد.