

Sur la théorie des nombres premiers.

Par

CH. DE LA VALLÉE POUSSIN à Louvain.

M. de la Vallée Poussin s'est occupé de la fréquence des nombres premiers de différentes formes dans un Mémoire étendu, publié dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles (1896) sous le titre: Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers.

Voici quelques conclusions de ce travail, concernant les nombres premiers d'une forme linéaire primitive $Mx + N$:

1° L'expression

$$\frac{\varphi(M)}{y} \sum_{q_N < y} lq_N,$$

dans laquelle la somme est étendue aux nombres premiers $< y$ et de la forme $Mx + N$, a pour limite l'unité quand y tend vers l'infini.

2° La différence

$$\varphi(M) \sum_{q_N < y} \frac{lq_N}{q_N} - ly$$

tend vers une limite finie et déterminée quand y tend vers l'infini.

3° Le nombre des nombres premiers de la forme $Mx + N$ et $< y$ peut se représenter par l'expression

$$\frac{1 + \varepsilon}{\varphi(M)} \frac{y}{ly}$$

où ε tend vers zéro quand y tend vers l'infini.

On a des conclusions analogues concernant les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant négatif ($-A$).

Soit h le nombre des classes de formes (positives) proprement primitives de ce déterminant:

1° Les expressions

$$\frac{2h}{y} \sum_{q_c < y} l_{q_c}, \quad \text{si } c \text{ est une classe ambiguë;}$$

$$\frac{h}{y} \sum_{q_c < y} l_{q_c}, \quad \text{si } c \text{ n'est pas ambiguë,}$$

expressions où les sommes s'étendent aux nombres premiers $< y$ et représentables par la classe c , ont pour limite l'unité quand y tend vers l'infini.

2° Le nombre des nombres premiers $< y$ et représentables par une classe c proprement primitive a pour expression asymptotique

$$\frac{1 + \varepsilon}{2h} \frac{y}{ly} \quad \text{ou} \quad \frac{1 + \varepsilon}{h} \frac{y}{ly}$$

suivant que c est une classe ambiguë ou non, ε ayant pour limite zéro quand y augmente indéfiniment.

Ces conclusions s'étendent aux formes de déterminant positif, mais la démonstration est plus difficile. Cette nouvelle démonstration, dont un résumé seulement a paru dans le Bulletin de la Société scientifique de Bruxelles (1897), sera publiée prochainement dans les Annales de cette même société.