

HYPERBOLICITÉ DES POLYNÔMES FIBRÉS

PAR OLIVIER SESTER (*)

RÉSUMÉ. — Nous posons les bases de l'étude des polynômes fibrés qui sont les applications de $X \times \mathbb{C}$ dans $X \times \mathbb{C}$ de la forme

$$(x, z) \mapsto (f(x), c_d(x)z^d + \cdots + c_1(x)z + c_0(x)),$$

où X est un compact, f une application continue de X dans lui-même et c_0, \dots, c_d ($d \geq 2$) des applications continues de X dans \mathbb{C} considérées comme paramètres.

La première étape consiste à étendre à ce cadre les notions usuelles en dynamique holomorphe d'ensemble de Julia, de fonction de Green associée et de coordonnée de Böttcher.

Nous nous attachons ensuite aux questions d'hyperbolicité. Notre résultat principal est une caractérisation en termes des ensembles critiques et post-critiques des polynômes fibrés dits hyperboliques, c'est-à-dire uniformément expansifs sur le Julia.

Enfin, nous concentrons notre étude sur le cas quadratique ($d = 2$) en décrivant de plusieurs manières équivalentes les polynômes fibrés quadratiques dont les ensembles de Julia sont des quasi-cercles et qui correspondent dans le cadre habituel à la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot.

ABSTRACT. — HYPERBOLICITY OF FIBERED POLYNOMIALS. — We lay the basis of the study of the dynamics of fibered polynomials. The setting is the following : given a compact Hausdorff space X , a continuous map f from X to X , and $d + 1$ continuous complex-valued functions, c_0, \dots, c_d ($d \geq 2$) on X , we consider the fibered mapping on $X \times \mathbb{C}$ of the form

$$(x, z) \mapsto (f(x), c_d(x)z^d + \cdots + c_1(x)z + c_0(x)).$$

The first step is to extend the familiar notions in complex dynamics of Julia set, Green function and Böttcher coordinates.

We then focus on the hyperbolic aspects of these maps. Our main theorem is a characterization of the fibered polynomials called hyperbolic which means uniformly expanding on their Julia set.

Finally, we proceed to a more detailed study of the quadratic case ($d = 2$). We identify in several equivalent ways the quadratic fibered polynomials whose Julia sets are quasi-circles. In the non-fibered case they correspond to the main cardioïde of the Mandelbrot set.

(*) Texte reçu le 19 juin 1998, révisé le 25 novembre 1998, accepté le 6 janvier 1999.
O. SESTER, Section de Mathématiques, 2–4 rue du Lièvre, 240 CH 1211, Genève 24.
Email : Oliver.Sester@math.unige.ch.

Classification AMS : 30D05, 58F23.

Mots clés : polynômes fibrés, dynamique holomorphe, ensemble de Julia, fonction de Green.

1. Introduction

Cet article est une introduction à l'étude dynamique des polynômes fibrés qui sont les applications de la forme :

$$P : X \times \mathbb{C} \longrightarrow X \times \mathbb{C},$$

$$(x, z) \longmapsto (f(x), P_x(z) = c_d(x)z^d + \cdots + c_1(x)z + c_0(x)),$$

où X est un compact, f une application continue de X dans lui-même, d un entier supérieur ou égal à 2 et $c = (c_d, \dots, c_0)$ une application continue de X dans \mathbb{C}^{d+1} avec $c_d(x) \neq 0$. L'application c joue ici le rôle du paramètre.

L'étude dynamique des polynômes fibrés est étroitement reliée à celle des polynômes d'une variable complexe. En effet, lorsque X est un point nous sommes ramenés à l'itération d'un polynôme complexe et nous parlerons du « cas constant » en référence à ce cas particulier.

Les polynômes fibrés n'ont à notre connaissance jamais été envisagés de façon systématique. Cependant certains résultats ont déjà été établis pour les produits croisés polynômiaux qui sont des endomorphismes de \mathbb{C}^2 de la forme $(x, y) \mapsto (p(x), q(x, y))$ avec p et q des polynômes complexes. Lorsque l'on se restreint à $K_p \times \mathbb{C}$ où K_p est l'ensemble de Julia rempli de p , on tombe sur un polynôme fibré au-dessus de (K_p, p) au sens précédent (cf. [Hei96] et [Jon97]).

Dans cet article, après avoir mis en place les principaux outils de l'étude des polynômes fibrés, nous nous intéressons aux aspects hyperboliques. Rappelons pour motiver ce point de vue, qu'un polynôme complexe est hyperbolique si il est expansif sur son ensemble de Julia et qu'une des principales conjectures en dynamique holomorphe est que les polynômes hyperboliques forment un ouvert dense dans l'espace des polynômes. Le point de vue combinatoire est également très intéressant mais ne sera pas abordé dans cet article. Mentionnons qu'une description combinatoire a déjà été entreprise dans [Ses97] et [Ses98].

Si P est un polynôme fibré sur (X, f) , on note $P^n = P \circ \cdots \circ P$ la composée de n applications P et P_x^n la seconde coordonnée de P^n , c'est-à-dire :

$$P_x^n = P_{f^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ P_{f(x)} \circ P_x.$$

Nous considérons alors l'ensemble de Julia rempli K de P , constitué des points (x, z) de $X \times \mathbb{C}$ dont l'orbite $\{P^n(x, z); n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compacte. Pour tout $x \in X$, nous désignons par K_x la fibre en x de K . L'ensemble de Julia en $x \in X$ est alors $J_x = \partial K_x$ et on note :

$$J = \overline{\bigcup_{x \in X} \{x\} \times J_x}.$$

Nous avons alors les inclusions :

$$\bigcup_{x \in X} \{x\} \times J_x \subset J \subset \partial K.$$

Nous présenterons aux paragraphes 4 et 5, différents exemples où chacune de ces inclusions est stricte.

Le polynôme fibré P (ou simplement le paramètre c) sera alors dit *hyperbolique* s'il est uniformément expansif sur J , *i.e.*

$$\exists A > 0, \lambda > 1, \forall (x, z) \in J, \quad |(P_x^n)'(z)| \geq A\lambda^n.$$

Un des résultats principaux de ce papier généralise au cadre fibré différentes caractérisations des paramètres hyperboliques en termes des ensembles critiques et post-critiques :

$$\Omega = \{(x, z) \in X \times \mathbb{C} \text{ tels que } P_x'(z) = 0\}, \quad \mathcal{P}\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P^n(\Omega).$$

Nous démontrerons au paragraphe 4 le :

THÉORÈME 1.1. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) P est hyperbolique.
- 2) Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$ soit toute ε_0 -pseudoorbite issue de ω est bornée soit toute ε_0 -pseudoorbite issue de ω tend vers l'infini.
- 3) $J \cap \overline{\mathcal{P}\Omega} = \emptyset$.

Une ε -pseudoorbite issue de (x, z) est une suite $(f^n(x), z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $X \times \mathbb{C}$ telle que

$$z_0 = z \quad \text{et} \quad |z_{n+1} - P_{f^n(x)}(z_n)| < \varepsilon$$

(la première coordonnée est une véritable orbite de f). Ces pseudoorbites permettent de généraliser les bassins des orbites périodiques attractives. En effet, une des difficultés majeures de la dynamique fibrée tient au fait que f n'a pas forcément de points périodiques et qu'il faut donc adapter les concepts et les résultats du cas constant en oubliant cette notion de points périodiques. L'ensemble des points (x, z) pour lesquels il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute ε -pseudoorbite issue de (x, z) est bornée joue réellement le rôle des bassins des orbites périodiques attractives.

La propriété 2) du théorème 1.1 traduit donc le résultat bien connu qu'un polynôme complexe est hyperbolique si et seulement si chaque point critique est attiré vers un cycle attractif. Un élément important est la

nécessité d'avoir un réel $\varepsilon_0 > 0$ indépendant de $x \in X$. En quelque sorte, les points critiques doivent être attirés de manière uniforme vers un « cycle attractif » ou vers l'infini.

La propriété 3) exprime le fait que l'ensemble post-critique n'accumule pas le Julia. L'équivalence des assertions 1) et 3) a déjà été démontrée pour les produits croisés-polynômiaux par M. Jonsson (cf. [Jon97]).

Nous ferons ensuite une étude plus détaillée d'un cas particulier de paramètres hyperboliques en degré $d = 2$. Nous définirons la « cardioïde généralisée » comme l'ensemble des paramètres c tels que P est hyperbolique et l'intérieur de K_x est connexe. En suivant les résultats du cas constant, nous établirons :

THÉORÈME 1.2. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) P est hyperbolique et pour tout $x \in X$ l'intérieur de K_x est connexe.
- 2) Il existe une famille $(V_x)_{x \in X}$ de domaines de Jordan, telle que :

$$0 \subset V_x \subset \text{int}(K_x), \quad P_x(\bar{V}_x) \subset V_{f(x)}.$$

On demande également que le diamètre intérieur de V_x et le module de l'anneau $P_x^{-1}(V_{f(x)}) \setminus \bar{V}_x$ soient uniformément minorés.

3) Il existe $\kappa > 1$ et $1 > r_0 > 0$ tels que pour tout x de X , il existe un homéomorphisme κ -quasiconforme Φ_x de \mathbb{C} , vérifiant $\Phi_x(0) = 0$ et pour $|z| \geq r_0$:

$$P_x(\Phi_x(z)) = \Phi_{f(x)}(c_2(x)z^2).$$

Ce théorème généralise un résultat de S.M. Heinemann sur les produits croisés polynomiaux (cf. [Hei96]). Il garantit en particulier que pour les paramètres c appartenant à la cardioïde généralisée, les ensembles de Julia remplis sont des κ -quasidisques avec κ indépendant de x .

Cet article est divisé en quatre parties correspondant aux paragraphes numérotés 2 à 5 qui s'organisent de la façon suivante :

Étant donné un polynôme fibré P au-dessus de (X, f) associé à un paramètre $c = (c_d, c_{d-1}, \dots, c_0)$, on pourra toujours du point de vue dynamique supposer que P est unitaire (i.e. $|c_d(x)| = 1$) et centré (i.e. $c_{d-1}(x) = 0$) quitte éventuellement à conjuguer par un homéomorphisme de $X \times \mathbb{C}$ de la forme $(x, z) \mapsto (x, a(x)z + b(x))$. En revanche, il existe une véritable obstruction homotopique que nous analysons au paragraphe 2, qui ne permet pas, comme dans le cas constant, de supposer systématiquement que P est monique (i.e. $c_d(x) = 1$).

Après avoir défini soigneusement la fonction de Green ainsi que la « coordonnée de Böttcher » de K_x qui conjugue de façon fibrée P_x à la

forme normale $z \mapsto c_d(x)z^d$ au voisinage de l'infini, nous montrerons comme dans le cas constant (voir [Dou94]) que $x \mapsto K_x$ est semi-continue supérieurement et que $x \mapsto \partial K_x$ est semi-continue inférieurement.

Au paragraphe 3, nous aborderons les questions d'hyperbolicité. Nous montrerons que l'ensemble stable par chaînes joue vraiment le rôle des bassins des orbites périodiques attractives. D'une part, celui-ci est un ouvert « attractif » pour la métrique hyperbolique. D'autre part, si V est une composante connexe de l'ensemble stable par chaînes alors V est aussi une composante de l'intérieur de K_x .

La démonstration du théorème 1.1 fait l'objet du paragraphe 4.

Enfin, le paragraphe 5 est consacré à la preuve du théorème 1.2. Pour mettre en relief la nécessité de l'uniformité en x , nous présenterons un exemple explicite où pour tout x de X , le point critique 0 appartient à l'intérieur de K_x qui est un k_x -quasidisque (avec une constante de quasi-conformité qui dépend de x) bien que le polynôme fibré considéré ne soit pas hyperbolique.

REMERCIEMENTS. — Je tiens à remercier particulièrement J.C. Yoccoz qui m'a donné de nombreux conseils et suggestions avisés, M. Jonsson avec qui j'ai eu des conversations fructueuses et le *referee* dont les remarques et propositions ont nettement amélioré la clarté de cet article.

2. Ensembles de Julia fibrés

Les résultats de cette partie sont essentiellement des extensions de faits bien connus en dynamique holomorphe standard. Nous ne donnerons que les grandes lignes des démonstrations lorsque celles-ci sont des adaptations directes du cas constant.

2.1. Préliminaires.

Nous commençons par introduire quelques conventions de notation. Dans cet article, X désigne un espace compact quelconque et f une application continue de X dans X . On fixe également un entier d supérieur ou égal à 2. D'une façon générale, si E est un espace métrique, on note $\mathcal{C}(X, E)$ l'ensemble des applications continues de X dans E muni de la norme de la convergence uniforme.

Si c est un élément de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^d)$, alors $c(x) = (c_d(x), \dots, c_0(x))$ avec c_i un élément de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ pour tout $i \leq d$, et $c_d(x) \neq 0$ pour tout x de X . L'application c étant donnée, on lui associe pour tout x de X , le polynôme complexe P_x de degré d :

$$P_x(z) = c_d(x)z^d + c_{d-1}(x)z^{d-1} + \dots + c_1(x)z + c_0(x).$$

On définit ensuite P le *polynôme fibré au-dessus de* (X, f) par :

$$P : X \times \mathbb{C} \longrightarrow X \times \mathbb{C}, \\ (x, z) \longmapsto (f(x), P_x(z)).$$

L'application $c \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^d)$ est considérée ici comme un paramètre.

Tout au long de cet article, nous désignerons par :

- $D(z, r)$ le disque ouvert inclus dans \mathbb{C} de centre z et de rayon $r > 0$,
- $S(z, r)$ le cercle $\partial D(z, r)$ et
- \mathbb{S}^1 le cercle unité.

Nous allons réduire l'ensemble des paramètres à $\mathcal{C}(X, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^{d-1})$ en faisant agir par conjugaison les homéomorphismes de $X \times \mathbb{C}$ de la forme $(x, z) \mapsto (x, a(x)z + b(x))$.

PROPOSITION 2.1. — *Soient $c \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^d)$ et P le polynôme fibré associé. Il existe des applications $u \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}_+^*)$ et $v \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ telles que P soit conjugué par $(x, z) \mapsto (x, u(x)z + v(x))$ au polynôme fibré $Q(x, z) = (f(x), Q_x(z))$ tel que*

$$Q_x(z) = c'_d(x)z^d + c'_{d-1}(x)z^{d-1} + \dots + c'_1(x)z + c'_0(x)$$

avec $|c'_d(x)| = 1$ et $c'_{d-1}(x) = 0$.

Preuve. — On pose pour tout $x \in X$:

$$u(x) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d^{n+1}} \log |c_d(f^n(x))|\right), \quad v(x) = \frac{c_{d-1}(x)u(x)}{dc_d(x)}.$$

Ainsi, $u \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}_+^*)$ et $v \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Un calcul élémentaire permet de s'assurer que $(x, z) \mapsto (x, u(x)z + v(x))$ conjugue P à Q un polynôme fibré unitaire et centré (i.e. $|c'_d(x)| = 1$ et $c'_{d-1}(x) = 0$). \square

Ceci nous conduit à l'espace des paramètres

$$\mathcal{C}_d(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^{d-1})$$

avec les conventions que si $c \in \mathcal{C}_d(X)$, alors

$$c(x) = (c_d(x), c_{d-2}(x), \dots, c_0(x)) \quad \text{et} \quad |c_d(x)| = 1.$$

Enfin, il nous reste à étudier l'action, toujours par conjugaison, des applications de la forme $(x, z) \mapsto (x, \omega(x)z)$ avec ω un élément de $\mathcal{C}(X, \mathbb{S}^1)$. Si $u \in \mathcal{C}(X, \mathbb{S}^1)$, on note $[u]$ sa classe d'homotopie et $G = [X : \mathbb{S}^1]$ le groupe des classes d'homotopie. L'application f définit un homomorphisme f^* de G dans G en posant

$$f^*([u]) = [u \circ f].$$

PROPOSITION 2.2. — Soient $c \in \mathcal{C}_d(X)$ et P le polynôme fibré associé. Alors, il existe $u \in \mathcal{C}(X, \mathbb{S}^1)$ telle que l'application $(x, z) \mapsto (x, u(x)z)$ conjugue P au polynôme fibré $Q(x, z) = (f(x), Q_x(z))$ avec

$$Q_x(z) = z^d + c'_{d-2}(x)z^{d-2} + \dots + c'_1(x)z + c'_0(x)$$

si et seulement si il existe $u_0 \in G$ telle que :

$$(1) \quad [u_0]^d = f^*([u_0])[c_d].$$

Démonstration. — La conjugaison de P par $(x, z) \mapsto (x, u(x)z)$ donne un polynôme fibré $Q(x, z) = (f(x), Q_x(z))$ tel que le terme de degré d de Q_x est $u(f(x))/u^d(x) \cdot c_d(x)$. Nous cherchons donc à résoudre

$$(2) \quad \frac{u(f(x))}{u^d(x)} c_d(x) = 1.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour résoudre cette équation est qu'il existe une application u_0 de X dans \mathbb{S}^1 telle que $[u_0]^d = f^*([u_0])[c_d]$. En effet, d'une part cette condition est clairement nécessaire. D'autre part, supposons qu'une telle application u_0 existe; alors

$$\varphi(x) = c_d(x) \frac{u_0(f(x))}{u_0^d(x)}$$

est une application continue de X dans \mathbb{S}^1 homotope à une constante. Le logarithme de φ est donc parfaitement défini et en posant

$$v(x) = (\varphi(x))^{1/d} (\varphi(f(x)))^{1/d^2} \dots (\varphi(f^{n-1}(x)))^{1/d^n} \dots$$

on obtient $v \in \mathcal{C}(X, \mathbb{S}^1)$ telle que :

$$\frac{v(f(x))}{v^d(x)} = \varphi(x)^{-1}.$$

La conjugaison par $(x, z) \mapsto (x, u(x)z)$ avec $u(x) = u_0(x)v(x)$ conduit alors à un polynôme dont le terme de plus haut degré est égal à 1. \square

REMARQUE. — La condition (1) est dans certains cas une véritable obstruction homotopique. Par exemple, en degré 2 si $X = \mathbb{S}^1$, $f(x) = x^2$ et $c_2(x) = x$ il n'existe pas d'application $u_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que $x \mapsto c_2(x)u_0(x^2)/u_0(x)^2$ soit homotope à une constante; le degré de cette application est un entier impair qui ne peut être nul.

Dans la suite, on ne supposera donc pas que l'hypothèse (1) est vérifiée et on se placera dans le cas général où $c \in \mathcal{C}_d(X)$ (i.e. $|c_d(x)| = 1$).

2.2. Définitions.

Nous généralisons ici les notions usuelles en dynamique holomorphe d'ensembles de Julia.

- On définit tout d'abord les *ensembles de Julia remplis* :

$$K = \{(x, z) \in X \times \mathbb{C} \text{ tels que } \sup_{n \in \mathbb{N}} |P_x^n(z)| < +\infty\},$$

$$K_x = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } (x, z) \in K\}.$$

- L'ensemble de Julia proprement dit, $J_x = \partial K_x$, est la frontière topologique de K_x , et on désignera

$$J = \overline{\bigcup_{x \in X} \{x\} \times J_x}.$$

Nous commençons par préciser quelques propriétés topologiques élémentaires de ces ensembles.

PROPOSITION 2.3. — Soient $c \in \mathcal{C}_d(X)$ et P le polynôme fibré associé. Alors, pour tout $x \in X$, K_x est inclus dans le disque de centre 0 et de rayon $R^*(P)$ avec

$$R^*(P) = \sup_{x \in X} (1 + |c_{d-2}(x)| + \dots + |c_0(x)|).$$

En outre, K est compact et K_x est un compact plein pour tout $x \in X$.

Preuve. — Comme dans le cas constant (cf. [DH84]), on vérifie que si $|z| \geq \lambda R^*(P)$ avec $\lambda > 1$, alors $|P_x^n(z)| \geq \lambda^n |z|$ d'où $z \notin K_x$.

Montrons maintenant que le complémentaire de K est ouvert. Si $(x, z) \notin K$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|P_x^N(z)| > R^*(P)$. Par continuité, il existe V un voisinage de (x, z) tel que si $(x', z') \in V$, on a $|P_{x'}^N(z')| > R^*(P)$ et par conséquent $(x', z') \notin K$. Les ensembles K et K_x sont des fermés respectivement de $X \times \overline{D(0, R^*(P))}$ et $\overline{D(0, R^*(P))}$; ils sont donc compacts. Enfin, le fait que K_x soit plein se démontre par l'absurde en appliquant le principe du maximum (voir [DH84]). \square

REMARQUES.

1) L'ensemble $\mathbb{C} \setminus J_x$ est, comme dans le cas constant, le lieu des points z tels que la suite de fonctions $(P_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une famille normale dans un voisinage de z .

2) Des définitions il découle que K est invariant par P (i.e. $P^{-1}(K) = K$). Si, en outre f est surjective alors K est totalement invariant par P .

2.3. Fonction de Green et représentation conforme.

Dans ce paragraphe, nous allons introduire les deux outils essentiels que sont la fonction de Green du compact K_x avec un pôle à l'infini et la coordonnée linéarisante de P_x au voisinage de l'infini. Notons Ω et Ω_x les différents ensembles critiques suivants :

$$\Omega = \{(x, z) \in X \times \mathbb{C} \text{ tels que } P'_x(z) = 0\},$$

$$\Omega_x = \{z \text{ tels que } (x, z) \in \Omega\}.$$

Si \log_+ est la fonction réelle telle que $\log_+(x) = \sup(\log |x|, 0)$, on définit pour tout $x \in X$ et $z \in \mathbb{C}$:

$$G(x, z) = G_x(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^n} \log_+ |P_x^n(z)|.$$

Cette définition a effectivement un sens et l'objet de la proposition suivante est de préciser certaines propriétés de G .

PROPOSITION 2.4. — *L'application G est continue de $X \times \mathbb{C}$ dans \mathbb{R}^+ et vérifie :*

- 1) G_x est harmonique dans $\mathbb{C} \setminus K_x$ et K_x est exactement l'ensemble des z tels que $G_x(z) = 0$;
- 2) G satisfait l'équation fonctionnelle $G(P(x, z)) = dG(x, z)$;
- 3) il existe des constantes $A(P)$ et $B(P)$ telles que, pour tout $|z| \geq B(P)$,

$$(3) \quad \sup_{x \in X} |G_x(z) - \log |z|| \leq \frac{A(P)}{|z|^2}.$$

Preuve. — À nouveau, nous ne présentons que les grandes lignes de la preuve. Si $R^*(P)$ est le rayon d'échappement défini précédemment, on montre comme dans le cas constant (cf. [BH88]) que pour $n \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$:

$$\left| \frac{1}{d^n} \log_+ |P_x^n(z)| - \frac{1}{d^{n+1}} \log_+ |P_x^{n+1}(z)| \right| \leq \frac{1}{d^{n+1}} \log(R^*(P))^{d+1}.$$

Par conséquent, la suite de fonctions continues

$$G_n : (x, z) \mapsto \frac{1}{d^n} \log_+ |P_x^n(z)|$$

converge uniformément dans $X \times \mathbb{C}$ vers la fonction continue G .

Si $z \notin K_x$, il existe un voisinage de z sur lequel les G_n sont harmoniques pour n assez grand. La fonction G_x est donc harmonique dans le complémentaire de K_x et $K_x = G_x^{-1}(0)$. L'équation fonctionnelle résulte du fait que $G_n(P(x, z)) = dG_{n+1}(x, z)$ pour tout $n \geq 0$, $x \in X$ et $z \in \mathbb{C}$. Quant au dernier point de la proposition, on a pour $|z| > R^*(P)$:

$$|G_1(x, z) - G_0(x, z)| \leq \frac{1}{d} \left| \log \left(1 - \frac{R^*(P) - 1}{|z|^2} \right) \right| \leq \frac{1}{d} \frac{R^*(P)^2}{|z|^2}.$$

Nous avons utilisé dans cette dernière inégalité le fait que si $0 < u < 1$, alors $|\log(1 - u)| \leq u/(1 - u)$. Donc pour $|z| > R^*(P)$:

$$|G(x, z) - \log |z|| \leq \frac{1}{d-1} \frac{R^*(P)^2}{|z|^2}.$$

D'où la troisième propriété, en posant

$$B(P) = R^*(P) + 1 \quad \text{et} \quad A(P) = \frac{1}{d-1} (R^*(P) + 1)^2. \quad \square$$

Nous exposons à présent deux conséquences des propriétés de la fonction G qui sont également des extensions de résultats bien connus dans le cas constant.

COROLLAIRE 2.5. — *Pour tout $x \in X$, la capacité logarithmique de K_x est égale à 1.*

COROLLAIRE 2.6. — *L'ensemble K_x est connexe pour tout $x \in X$ si et seulement si $\Omega \subset K$.*

Soulignons que le premier corollaire implique en particulier que le diamètre de K_x est minoré par 2.

Preuve du corollaire 2.5. — D'après la propriété 3) de la proposition 2.4, la constante de Robin σ de K_x est nulle (la constante σ est définie par $G_x(z) = \log |z| + \sigma + o(1)$ quand $z \rightarrow \infty$, voir [Doo84]); donc la capacité logarithmique $\exp(-\sigma)$ de K_x est égale à 1. \square

Preuve du corollaire 2.6. — Remarquons tout d'abord que d'après la proposition 2.4, G_x n'a pas de points critiques dans un voisinage fixé de l'infini (indépendant de x). Par conséquent, on déduit de l'équation fonctionnelle que les points critiques de G_x dans $\mathbb{C} \setminus K_x$ sont les images inverses des points critiques de $P_{f^n(x)}$ par P_x^n . D'où si $\Omega \subset K$, G_x n'a pas de points critiques et les lignes de niveaux de G_x sont des courbes de Jordan. Ainsi, $H_x(r) = \{z \text{ tels que } G_x(z) \leq r\}$ est un compact connexe de \mathbb{C} et $K_x = \bigcap_{r>0} H_x(r)$ est également compact et connexe.

Réciproquement, si il existe $\omega_x \in \Omega_x \cap \mathbb{C} \setminus K_x$ alors $\text{int}(H_x(r_0))$ possède au moins deux composantes connexes pour $r_0 = G_x(\omega_x)$. En outre, chacune de ces composantes rencontre K_x . Dans le cas contraire, on obtiendrait par le principe du maximum une composante de $\text{int}(H_x(r_0))$ sur laquelle G_x serait constante égale à r_0 , ce qui est exclu. Ainsi, $\text{int}(H_x(r_0))$ possède plusieurs composantes connexes chacune rencontrant K_x . \square

Introduisons encore les notations suivantes :

$$g(x) = \sup_{\omega \in \Omega_x} G_x(\omega), \quad r(x) = \exp g(x),$$

$$W_x = \{z \in \mathbb{C}; G_x(z) > g(x)\}, \quad W = \{(x, z); z \in W_x\}.$$

Remarquons que g est une fonction continue de x ; donc W est un ouvert de $X \times \mathbb{C}$. La proposition suivante généralise au cadre fibré la coordonnée de Böttcher.

PROPOSITION 2.7. — *Pour tout $c \in \mathcal{C}_d(X)$ et $x \in X$, il existe un unique isomorphisme holomorphe $\varphi_x : W_x \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r_x)}$ qui vérifie :*

- 1) si $q_x(z) = c_d(x)z^d$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} W_x & \xrightarrow{P_x} & W_{f(x)} \\ \varphi_x \downarrow & & \downarrow \varphi_{f(x)} \\ \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r(x))} & \xrightarrow{q} & \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r(f(x)))} \end{array}$$

- 2) la fonction $\varphi : W \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x, z) = \varphi_x(z)$ est continue;
- 3) pour tout $(x, z) \in W$, on a $G(x, z) = \log |\varphi_x(z)|$;
- 4) φ_x est tangente à l'identité en l'infini.

Preuve. — Soit R un nombre réel tel que $R > g(x)$ et $R > 2R^*(P)$. Pour $|z| > R$, on pose :

$$(4) \quad \varphi(x, z) = \varphi_x(z) = z \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{c_{d-2}(f^n(x))}{c_d(x)(P_x^n(z))^2} + \dots + \frac{c_0(f^n(x))}{c_d(x)(P_x^n(z))^d} \right)^{\frac{1}{d^{n+1}}}.$$

La puissance fractionnaire désigne la détermination principale de la racine d^{n+1} -ième qui est parfaitement définie pour $|z| > R$. Ainsi, le produit infini (4) converge uniformément pour $|z| > R$; chacun des

facteurs dépend continuellement de x , et est holomorphe en z . La limite φ du produit infini est donc également holomorphe en z et continue par rapport à x . Il découle de l'expression (4) que, pour $|z| > R$:

$$(5) \quad \varphi(P(x, z)) = c_d(x)(\varphi(x, z))^d.$$

Par cette formule on peut étendre φ_x tant que l'on ne rencontre pas les points critiques de P_x ; donc φ_x s'étend en un isomorphisme holomorphe de W_x sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r(x))}$. En calculant $\log |\varphi_x|$ à partir de (4), on trouve directement que $\log |\varphi_x(z)| = G(x, z)$. Enfin, toujours d'après la formule (4), φ_x est clairement tangente à l'identité en l'infini. \square

2.4. Semi-continuités de K_x et J_x .

Nous achevons ce paragraphe en analysant les propriétés de semi-continuité par rapport au point de base x des ensembles K_x et J_x .

Nous désignerons par $\text{Comp}^*(\mathbb{C})$ l'ensemble des compacts non vides de \mathbb{C} muni de la distance de Hausdorff. La proposition ci-dessous est une caractérisation de la semi-continuité supérieure pour une famille de compacts de \mathbb{C} . On trouvera une preuve de ce critère dans [Dou94].

PROPOSITION 2.8. — *Soit $(K_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de sous-ensembles non vides de \mathbb{C} indexée par un espace compact Γ . Considérons l'espace \mathcal{H} des $(\gamma, z) \in \Gamma \times \mathbb{C}$ tels que $z \in K_\gamma$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *l'application $\gamma \mapsto K_\gamma$ est semi-continue supérieurement de Γ dans $\text{Comp}^*(\mathbb{C})$;*
- 2) *\mathcal{H} est fermé dans $\Gamma \times \mathbb{C}$ et la projection $p_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \Gamma$ est surjective.*

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

PROPOSITION 2.9.

- 1) *L'application $x \mapsto K_x$ de X dans $\text{Comp}^*(\mathbb{C})$ est semi-continue supérieurement.*
- 2) *L'application $x \mapsto J_x$ de X dans $\text{Comp}^*(\mathbb{C})$ est semi-continue inférieurement.*

Démonstration. — 1) Ce premier point résulte de la combinaison des propositions 2.3 et 2.8.

2) La preuve « habituelle » dans le cas constant (cf. [Dou94]) ne s'adapte pas à notre cadre car elle fait appel aux points périodiques répulsifs. La preuve que nous présentons ici nous a été suggérée par le *referee*.

D'après la proposition 2.4, l'application $x \mapsto G_x$ est continue de X à valeurs dans L_{loc}^1 . Ainsi, $x \mapsto \Delta G_x$ est également continue au sens des distributions. Donc, le support de ΔG_x est semi-continu inférieurement par rapport à x . En outre, comme G_x est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus J_x$, $\text{supp}(\Delta G_x) \subset J_x$. D'autre part, la fonction G_x ne peut être harmonique dans aucun voisinage de $z \in J_x$ (sinon G_x serait identiquement nulle dans ce voisinage), d'où $J_x \subset \text{supp}(\Delta G_x)$ et $J_x = \text{supp}(\Delta G_x)$. Ce qui prouve la semi-continuité inférieure de $x \mapsto J_x$. \square

REMARQUE. — On peut montrer de la même façon (voir [Ses97]) que les applications $(P, x) \mapsto K_x(P)$ et $(P, x) \mapsto J_x(P)$ sont semi-continues supérieurement et inférieurement.

3. Ensemble stable par chaînes

Nous nous attachons dans ce paragraphe à la généralisation au cadre fibré des bassins des orbites périodiques attractives. Un polynôme fibré n'ayant pas de cycles attractifs en général, nous définissons à l'aide de pseudoorbites l'ensemble stable par chaînes. Celui-ci conservera certaines propriétés des bassins attractifs, comme par exemple de contenir toujours un point critique ou encore d'être attractif dans un sens que nous expliciterons.

Précisons tout de suite ce que nous entendons par pseudoorbite tout au long de cet article.

DÉFINITION. — Soient $\varepsilon > 0$ et $(x, z) \in X \times \mathbb{C}$; on appelle ε -pseudoorbite issue de (x, z) une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f^n(x), z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $X \times \mathbb{C}$ telle que :

- $z_0 = z$;
- $|z_{n+1} - P_{f^n(x)}(z_n)| < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par rapport à la notion usuelle de pseudoorbite, nous imposons que la première coordonnée de la suite (y_n) soit une véritable orbite de f .

• Si $\varepsilon > 0$, on définit l'ensemble $U(\varepsilon)$ des couples $(x, z) \in X \times \mathbb{C}$ tels que toute ε -pseudoorbite issue de (x, z) est bornée.

• De façon analogue, on définit l'ensemble $U^\infty(\varepsilon)$ des couples $(x, z) \in X \times \mathbb{C}$ tels que toute ε -pseudoorbite $(f^n(x), z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ issue de (x, z) est incluse dans le complémentaire de K (i.e. $z_n \in \mathbb{C} \setminus K_{f^n(x)}$).

On note :

$$U_x(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}, (x, z) \in U(\varepsilon)\},$$

$$U_x^\infty(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}, (x, z) \in U^\infty(\varepsilon)\},$$

$$U = \bigcup_{\varepsilon > 0} U(\varepsilon), \quad U_x = \bigcup_{\varepsilon > 0} U_x(\varepsilon).$$

REMARQUE. — La définition de $U^\infty(\varepsilon)$ ne change pas si on demande que les ε -pseudoorbites tendent vers l'infini. En effet, si $\tilde{U}^\infty(\varepsilon)$ désigne l'ensemble des $(x, z) \in X \times \mathbb{C}$ tels que toute ε -pseudoorbite $(f^n(x), z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ issue de (x, z) tendent vers l'infini (i.e. $z_n \rightarrow \infty$), nous avons l'inclusion $\tilde{U}^\infty(\varepsilon) \subset U^\infty(\varepsilon)$. De plus, compte tenu de la continuité de G et de l'harmonicité des G_x , il existe $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ tel que $U^\infty(\varepsilon) \subset \tilde{U}^\infty(\varepsilon_1)$.

On désigne par F_x l'intérieur de K_x et on commence par donner quelques propriétés élémentaires de U_x .

PROPOSITION 3.1.

- 1) U_x est un ouvert inclus dans F_x ;
- 2) U est invariant par P ;
- 3) les composantes connexes de U_x sont simplement connexes.

Preuve. — 1) Soit k une constante positive telle $|P'_x(z)| \leq k$ pour tout $(x, z) \in K$. Pour $z \in U_x(\varepsilon)$, nous avons l'inclusion $D(z, \frac{\varepsilon}{2k}) \subset U_x(\frac{\varepsilon}{2})$.

2) Supposons que $P(x, z) \in U(\varepsilon)$ et considérons une $\frac{\varepsilon}{2k}$ -pseudoorbite (y_n) issue de (x, z) . On définit alors une suite (y'_n) par $y'_0 = P(x, z)$ et $y'_n = y_{n+1}$ pour $n \geq 1$. Par construction, (y'_n) est une ε -pseudoorbite issue de $P(x, z)$ qui est bornée donc (y_n) l'est également, et on conclut que $(x, z) \in U(\frac{\varepsilon}{2k})$.

3) Nous démontrons ce dernier point par l'absurde. Supposons qu'il existe x dans X et γ un lacet inclus dans U_x non homotope à un point. On note \mathcal{C}_γ la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, $\Delta = \mathcal{C}_\gamma \cap (\mathbb{C} \setminus U_x)$, $\mathcal{C}_\gamma^n = P_x^n(\mathcal{C}_\gamma)$ et $\Delta^n = P_x^n(\Delta)$.

Nous affirmons en premier lieu qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\gamma \subset U_x(\varepsilon_1)$. En effet, considérons pour $z \in \gamma$,

$$\varepsilon(z) = \sup\{\varepsilon > 0 \text{ tel que } z \in U_x(\varepsilon)\}.$$

L'application ε est semi-continue inférieurement ; donc $\varepsilon_1 = \inf_{z \in \gamma}(\varepsilon(z))$ est strictement positif et $\gamma \subset U_x(\varepsilon_1)$.

Choisissons $0 < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_1}{2k}$ et $z \in \Delta$. Notons $(f^n(x), z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une ε -pseudo-orbite issue de (x, z) qui est non bornée. On définit alors n_0 le plus petit entier tel que $z_{n_0-1} \in \mathcal{C}_\gamma^{n_0-1}$ et $z_{n_0} \notin \mathcal{C}_\gamma^{n_0}$. Comme $d(z_{n_0}, P_x^{n_0}(\gamma)) \leq \varepsilon$, il existe $w \in \gamma$ tel que $|z_{n_0} - P_x^{n_0}(w)| \leq \varepsilon$. Soit (z'_n) la suite définie par $z'_n = P_x^n(w)$ pour $n \leq n_0$ et $z'_n = z_n$ pour $n \geq n_0 + 1$. La suite $(f^n(x), z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une ε_1 -pseudo-orbite issue de (x, w) . En effet, $|z_{n_0} - z'_{n_0}| \leq \varepsilon$; donc

$$|P_{f^{n_0}(x)}(z'_{n_0}) - z'_{n_0+1}| \leq k\varepsilon + \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Cette pseudo-orbite est non bornée par construction, ce qui contredit le choix de ε_1 . \square

Dans le cas constant, *i.e.* $X = \{x_0\}$, si $c(x_0) = (c_d, c_{d-2}, \dots, c_0) \in \mathbb{C}^d$ alors U_{x_0} coïncide avec les bassins d'attraction des orbites périodiques attractives du polynôme $P_{x_0}(z) = c_d z^d + c_{d-2} z^{d-2} + \dots + c_0$.

Nous allons à présent nous attacher à la description des composantes connexes de U_x . Notons V l'une d'entre elles et $V^n = P_x^n(V)$. Rappelons que Ω_x est l'ensemble des points critiques de P_x . De la même façon que les bassins immédiats des orbites périodiques attractives contiennent toujours des points critiques, nous allons montrer que $P_x^n(V)$ rencontre $\Omega_{f^n(x)}$ pour une infinité d'entiers n . On note encore

$$\Lambda(V) = \{n \geq 0 \text{ tel que } \Omega_{f^n(x)} \cap V^n \neq \emptyset\}.$$

PROPOSITION 3.2. — *L'ensemble $\Lambda(V)$ est infini et si*

$$\Lambda(V) = \{n_0 < n_1 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots\},$$

alors il existe un entier $N(V)$ tel que $n_{k+1} - n_k \leq N(V)$.

Preuve. — Soient $z_0 \in U_x$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que $z_0 \in U_x(2\varepsilon_0)$. Considérons une représentation conforme $\varphi_n : \mathbb{D} \rightarrow V^n$ telle que $\varphi_n(0) = P_x^n(z_0)$ et notons

$$B_n = \varphi_{n+1}^{-1} \circ P_{f^n(x)} \circ \varphi_n;$$

B_n est un produit de Blaschke de degré au plus d . L'application φ_n est normalisée de telle façon que si $\Omega_{f^{n-1}(x)} \cap V^{n-1} = \emptyset$ alors $B_{n-1} = \text{id}$, sinon on impose $\varphi'_n(0) \in \mathbb{R}_+$ (y compris pour $n = 0$).

Remarquons tout d'abord que $d(P_x^n(z_0), \partial V^n) \geq 2\varepsilon_0$; donc d'après les estimations de Koebe (*cf.* [Dur86]), $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille normale de fonctions univalentes. Soit r_0 un réel, $0 < r_0 < 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(\varphi_n(D(0, r_0)), \partial V^n) < \varepsilon_0.$$

Fixons également un réel strictement positif $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0, r_0)$ tel que si $u, v \in D(0, r_0)$ et $|u - v| \leq \delta_0$ alors :

$$|\varphi_n(u) - \varphi_n(v)| \leq \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, si $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $\omega_0 = 0$, $\omega_n \in D(0, r_0)$ et $|B_n(\omega_n) - \omega_{n+1}| \leq \delta_0$, alors $(f^n(x), \varphi_n(\omega_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une ε_0 -pseudoorbite issue de (x, z_0) .

Nous allons prouver par l'absurde que les produits de Blaschke $(B_n)_{n \leq N}$ ne peuvent pas tous être égaux à l'identité où $N = E(r_0/\delta_0) + 1$ (E est la fonction partie entière). Soit $\omega_N = r_0 e^{i\theta}$ un élément du cercle $S(0, r_0)$ tel que $d(\varphi_N(\omega_N), \partial V^N) < \varepsilon_0$. On définit $\omega_n = n\delta_0 e^{i\theta}$ pour $n \leq N - 1$. Notons Z un élément de ∂V^N tel que $|\varphi_N(\omega_N) - Z| \leq \varepsilon_0$ et considérons $(f^n(f^N(x)), Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une ε_0 -pseudoorbite issue de $(f^N(x), Z)$ qui soit non bornée. On définit alors $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite :

- $z_n = \varphi_n(\omega_n)$ pour $n \leq N - 1$;
- $z_N = Z$ et $z_n = Z_{n-N}$ pour $n > N$.

Supposons que $\Omega_{f^n(x)} \cap V^n = \emptyset$ pour tout $n \leq N$. Alors, si $n \leq N - 2$ on a par construction $|P_{f^n(x)}(z_n) - z_{n+1}| \leq \varepsilon_0$ et

$$\begin{aligned} & |P_{f^{N-1}(x)}(z_{N-1}) - z_N| \\ & \leq |P_{f^{N-1}(x)}(z_{N-1}) - \varphi_N(\omega_N)| - |\varphi_N(\omega_N) - z_N| \leq 2\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Ainsi, $(f^n(x), z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $2\varepsilon_0$ -pseudoorbite issue de z_0 ; elle est non bornée par construction, ce qui constitue une contradiction. En définitive, $\Lambda(V) \neq \emptyset$ et $n_0 = \inf \Lambda(V) \leq N$.

On peut refaire la même démonstration avec $(f^{n_0+1}(x), P_x^{n_0+1}(z_0))$ (N ne dépend que de ε_0 et de δ_0 qui sont inchangés) pour finalement en déduire que $\Lambda(V)$ est infini et que $n_{k+1} - n_k \leq N$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. \square

Reprenons une composante connexe V de U_x , z_0 dans $V \cap U_x(2\varepsilon_0)$ et considérons la composante connexe W de F_x contenant V . Posons $W^n = P_x^n(W)$. On note $h_n : \mathbb{D} \rightarrow W^n$ une représentation conforme de W^n telle que $h_n(0) = P_x^n(z_0)$. Nous allons préciser le caractère attractif de U_x en montrant la :

PROPOSITION 3.3. — *Pour tout $\tau \in]0; 1[$, il existe un entier $p = p(W, z_0, \tau)$ tel que :*

$$P_x^p(h_0(D(0, \tau))) \subset h_p(D(0, \tau^2)).$$

On note $B_j = h_{j+1}^{-1} \circ P_{f^j(x)} \circ h_j$ le produit de Blaschke de degré au plus d qui fixe 0, et qui s'écrit sous la forme :

$$B_j(z) = \lambda_j z \prod_{i=0}^d \frac{z - a_i^j}{1 - \bar{a}_i^j z} \quad \text{avec } |\lambda_j| = 1 \text{ et } |a_i^j| \leq 1.$$

Nous savons d'après la proposition précédente que pour une infinité de j (les éléments de $\Lambda(V)$), il existe $i \leq d$ tel que $|a_i^j| < 1$.

Le lemme suivant apporte une précision à cette dernière inégalité. Il constitue en fait l'élément essentiel de la preuve de la proposition 3.3.

LEMME 3.4. — *Il existe $\delta_1 = \delta_1(W, z_0)$, $0 < \delta_1 < 1$ tel qu'une infinité de a_i^j vérifient :*

$$|a_i^j| \leq \delta_1.$$

Preuve de la proposition 3.3. — Soit \mathcal{J} l'ensemble des entiers j tels qu'il existe au moins un élément a_i^j , $i \leq d$, de module inférieur à δ_1 où δ_1 est le réel donné par le lemme précédent. Fixons maintenant $0 < \tau < 1$ et notons :

$$1 - \delta_2 = \max_{\{|a| \leq \delta_1\} \times \{|z| \leq \tau\}} \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|.$$

Si $k(p)$ désigne le cardinal de $\mathcal{J} \cap \{1; 2; \dots; p\}$ alors

$$|B_p \circ \dots \circ B_1 \circ B_0(z)| \leq |z|(1 - \delta_2)^{k(p)}.$$

D'après le lemme 3.4, $k(p)$ tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $(1 - \delta_2)^{k(p)} \leq \tau$ et par conséquent pour $|z| \leq \tau$, on a $|B_p \circ \dots \circ B_1 \circ B_0(z)| \leq \tau^2$, d'où $P_x^p(h_0(D(0, \tau))) \subset h_p(D(0, \tau^2))$. \square

Preuve du lemme 3.4. — La démarche suivie est formellement la même que celle de la proposition 3.2. Étant donné $z_0 \in U_x(2\varepsilon_0)$, on raisonne par l'absurde en construisant une $2\varepsilon_0$ -pseudoorbite issue de z_0 qui soit non bornée.

Comme précédemment, les fonctions h_n forment une famille normale et il existe r_0 , $0 < r_0 < 1$, tel que $d(h_n(D(0, r_0)), \partial W^n) < \varepsilon_0$. Ensuite, on définit le réel $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0, r_0)$ tel que si u et v appartiennent au disque $D(0, r_0)$ et si $|u - v| < \delta_0$, alors $|h_n(u) - h_n(v)| < \varepsilon_0$ pour tout n de \mathbb{N} .

Supposons par l'absurde que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $i \leq d$, $1 - |a_i^j| \leq \varepsilon$, où ε est un réel très petit tel que

$$(6) \quad \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1 - r_0} \leq 1 \quad \text{et} \quad (1 - \varepsilon)^d - 2^d \sqrt{\varepsilon} \geq 1 - \frac{\delta_0}{2r_0}.$$

Si $|z| \leq r_0$, alors $|1 - \bar{a}_i^j z| \geq 1 - r_0$ et par conséquent

$$\left| \frac{z - a_i^j}{1 - \bar{a}_i^j z} \right| \geq |a_i^j| - \frac{2\varepsilon}{1 - r_0} \geq |a_i^j| - \sqrt{\varepsilon}.$$

D'où

$$\prod_{i=0}^d \left| \frac{z - a_i^j}{1 - \bar{a}_i^j z} \right| \geq \prod_{i=0}^d |a_i^j| - 2^d \sqrt{\varepsilon} \geq (1 - \varepsilon)^d - 2^d \sqrt{\varepsilon}.$$

Si ε satisfait les inégalités (6), toujours pour $|z| \leq r_0$, nous avons

$$(7) \quad |B_j(z)| \geq |z| \left(1 - \frac{\delta_0}{2r_0} \right) \geq |z| - \frac{\delta_0}{2}.$$

Nous allons déduire de cette minoration une $2\varepsilon_0$ -pseudoorbite issue de z_0 qui est non bornée. Fixons N le plus petit entier tel que $r_0 - (N-1)\frac{1}{2}\delta_0 < \delta_0$ et notons ω_N un élément de $S(0, r_0)$ tel que $d(h_N(\omega_N), \partial W^N) < \varepsilon_0$. Nous construisons par récurrence descendante sur l'entier n , une suite $(\omega_n)_{n \leq N}$ d'éléments de $D(0, r_0)$ telle que $\omega_0 = 0$ et $|B_n(\omega_n) - \omega_{n+1}| \leq \delta_0$. Supposons que ω_n est déjà défini pour $n \geq 2$, alors si $|\omega_n| < \delta_0$, on pose $\omega_{n-1} = 0$. Sinon, $\omega_n = \rho_n e^{i\theta_n}$; on pose $\tilde{\omega}_n = (\rho_n - \delta_0) e^{i\theta_n}$ et on choisit pour ω_{n-1} un élément quelconque de $B_{n-1}^{-1}(\tilde{\omega}_n)$. Compte tenu de (7), on obtient une suite $(\omega_n)_{n \leq N}$ qui vérifie $|B_{n-1}(\omega_{n-1}) - \omega_n| \leq \delta_0$ et $\omega_0 = 0$. On note Z_1 un élément de ∂W^N tel que $|h_N(\omega_N) - Z_1| \leq \varepsilon_0$ et Z_2 un élément du complémentaire de $K_{f^{N+1}(x)}$ tel que $|P_{f^N(x)}(Z_1) - Z_2| < \varepsilon_0$. On définit alors la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- $z_n = h_n(\omega_n)$ pour $n \leq N - 1$;
- $z_N = Z_1$ et $z_n = P_{f^{N+1}(x)}^{n-N-1}(Z_2)$ pour $n \geq N + 1$.

Par construction, $(f^n(x), z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $2\varepsilon_0$ -pseudoorbite non bornée issue de (x, z_0) , ce qui constitue la contradiction attendue. Par conséquent, il existe $j \in \mathbb{N}$ et $i \leq d$ tels que $|a_i^j| \leq 1 - \varepsilon = \delta_1$. Ce premier point étant acquis, la démonstration fonctionne de la même façon avec $P_x^{j+1}(z_0)$ car les différentes constantes ε_0 , r_0 et δ_0 sont inchangées. En définitive, il existe une infinité de a_i^j tels que $|a_i^j| < \delta_1$. \square

La proposition 3.3 possède plusieurs conséquences importantes, notamment les corollaires suivants qui constituent un début de classification des composantes de F_x .

COROLLAIRE 3.5. — *Les composantes connexes de U_x sont des composantes connexes de F_x .*

COROLLAIRE 3.6. — *Si z et z_0 appartiennent à la même composante connexe de U_x , alors $|P_x^n(z) - P_x^n(z_0)|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Preuve. — Nous allons montrer ces deux corollaires en même temps. Considérons une composante connexe V de U_x et W la composante connexe de F_x qui contient V . Soient $z_0 \in U_x(2\varepsilon_0) \cap V$ et k la constante de Lipschitz de P_x restreint à K_x . Nous obtenons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inclusion

$$(8) \quad D\left(P_x^n(z_0), \frac{\varepsilon_0}{k}\right) \subset U_{f^n(x)}(\varepsilon_0).$$

On conserve les notations précédentes et on considère $z \in W$ et $\tilde{z} = h_0^{-1}(z)$. Il ressort de la proposition 3.3 que $|B_n \circ \dots \circ B_0(\tilde{z})|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, d'une part $|P_x^n(z) - P_x^n(z_0)|$ tend vers 0. D'autre part, d'après l'inclusion (8), si N est assez grand $P_x^N(z) \in U_{f^N(x)}(\varepsilon_0)$; donc $z \in U_x$. \square

4. Hyperbolicité

4.1. Critères d'hyperbolicité.

Rappelons que nous avons noté $J = \overline{\bigcup_{x \in X} \{x\} \times J_x}$ et qu'un polynôme fibré P est dit hyperbolique s'il est uniformément expansif sur J , i.e. s'il existe $A > 0$ et $\lambda > 1$ tels que $|(P_x^n)'(z)| \geq A\lambda^n$ pour tout $(x, z) \in J$. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de caractériser de plusieurs façons équivalentes les paramètres hyperboliques.

Nous commençons par démontrer que l'hyperbolicité implique la continuité de l'application $x \mapsto J_x$.

PROPOSITION 4.1. — *Si P est hyperbolique, alors $x \mapsto J_x$ est continue pour la distance de Hausdorff des compacts de \mathbb{C} .*

Preuve. — Comme nous avons déjà établi la semi-continuité inférieure à la proposition 2.9, il suffit donc de prouver la semi-continuité supérieure qui est équivalente au fait que $\mathcal{E} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times J_x$ est fermé d'après la caractérisation 2.8.

Par l'absurde, supposons que $(x, z) \in \bar{\mathcal{E}} \setminus \mathcal{E}$. L'ensemble K étant fermé, $(x, z) \in K \setminus \mathcal{E}$ donc $z \in \text{int}(K_x)$. Soit $D(z, r)$ un disque centré en z inclus dans l'intérieur de K_x . Les domaines $P_x^k(D(z, r))$ pour $k \in \mathbb{N}$ sont bornés car ils sont contenus dans $K_{f^k(x)}$. Donc, d'après la formule de Cauchy, les dérivées $(P_x^k)'$ sont uniformément bornées pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ceci contredit $(x, z) \in \bar{\mathcal{E}}$, car l'hypothèse d'hyperbolicité implique l'expansivité uniforme des dérivées sur $\bar{\mathcal{E}} = J$. D'où, $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$ et $x \mapsto J_x$ est continue. \square

REMARQUE. — Si l'hyperbolicité implique que $x \mapsto J_x$ est continue, il n'en est rien de l'application $x \mapsto K_x$ comme le montre l'exemple 4.1 à la fin de ce paragraphe.

Rappelons que Ω et Ω_x désignent les ensembles critiques de P et P_x . On considère alors les ensembles *postcritiques* :

$$\mathcal{P}\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P^n(\Omega) := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathcal{P}\Omega_x.$$

Nous en venons maintenant au théorème principal de ce paragraphe énoncé dans l'introduction que nous reformulons d'une façon légèrement différente.

THÉORÈME 4.2. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) P est hyperbolique ;
- 2) il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\Omega \subset U(\varepsilon_0) \cup U^\infty(\varepsilon_0)$;
- 3) il existe $(V_x)_{x \in X}$ une famille d'ouverts et $\varepsilon_0 > 0$ tels que

$$J_x \subset \mathbb{C} \setminus V_x, \quad \Omega_x \subset V_x, \\ P_x(V_x) \subset V_{f(x)}, \quad d(P_x(V_x), \partial V_{f(x)}) \geq \varepsilon_0 ;$$

- 4) $\overline{\mathcal{P}\Omega} \cap J = \emptyset$.

Ces propriétés généralisent différentes caractérisations de l'hyperbolicité dans le cas constant (cf. [DH84], [McM94] ou [CG92]).

- La propriété 2) est le pendant fibré au fait que pour les polynômes complexes hyperboliques tous les points critiques sont attirés vers un cycle attractif. Cette attraction doit se faire de manière uniforme (ε_0 est indépendant de x) ; nous présenterons d'ailleurs au paragraphe suivant un exemple où tous les points critiques sont dans l'ensemble stable par chaînes sans pour autant qu'il y ait hyperbolicité.

- L'assertion 3) est un peu technique mais nous sera d'une grande utilité au paragraphe suivant.

- Enfin, la propriété 4) exprime le fait que pour un polynôme hyperbolique l'ensemble post-critique n'accumule pas l'ensemble de Julia.

REMARQUE. — Comme nous l'avons déjà souligné, l'assertion 2) implique que toute ε_1 -pseudoorbite, issue de $\omega \in \Omega \cap U^\infty(\varepsilon_0)$ tend vers l'infini, pour un réel $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ indépendant de x .

Rappelons que F_x désigne l'intérieur de K_x . Le théorème 4.2 nous permet de comprendre relativement bien la dynamique d'un polynôme fibré hyperbolique dans la mesure où :

COROLLAIRE 4.3. — Si P est hyperbolique alors, pour tout $x \in X$, $F_x = U_x$ et J_x est de mesure nulle.

Preuve. — Soit V une composante connexe de l'intérieur de K_x . Montrons qu'il existe un entier n tel que $P_x^n(V) \cap \Omega_{f^n(x)} \neq \emptyset$. Supposons par l'absurde que cette intersection est vide pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après le principe du maximum appliqué à $1/(P_x^n)'$, pour tout $z \in V$:

$$(9) \quad \left| \frac{1}{(P_x^n)'(z)} \right| \leq \max_{Z \in \partial V} \left| \frac{1}{(P_x^n)'(Z)} \right| \leq A^{-1} \lambda^{-n}.$$

Or, $V \subset K_x$ donc pour tout $z \in V$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|P_x^n(z)| \leq R^*(P)$. Par la formule de Cauchy, on déduit que $|(P_x^n)'|$ est bornée sur V ce qui contredit (9). Il découle de la deuxième assertion du théorème 4.2 et du corollaire 3.5 que $P_x^n(V) \subset U_{f^n(x)}$ et par conséquent $V \subset U_x$.

Pour ce qui est de la mesure de J_x , on montre que J_x est uniformément poreux (cf. [CG92]). Plus précisément, nous affirons qu'il existe $0 < \delta < 1$ tel que pour tout $(x, z) \in J$ et $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} \varepsilon_0$, il existe $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ satisfaisant

$$(10) \quad D(\tilde{z}, \delta\varepsilon) \subset D(z, \varepsilon) \cap (\mathbb{C} \setminus K_x)$$

Tout d'abord, de la continuité de $x \mapsto J_x$, on déduit par l'absurde qu'il existe $0 < \delta < 1$ tel que pour tout $(x, z) \in J$, il existe $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ tel que

$$(11) \quad D(\tilde{z}, \frac{1}{2} \delta \varepsilon_0) \subset D(z, \frac{1}{2} \varepsilon_0) \cap (\mathbb{C} \setminus K_x).$$

Ensuite, comme les branches inverses de P_x^n sont définies et univalentes sur un disque de centre $P_x^n(z)$ et de rayon ε_0 , on peut propager la propriété (11) à toutes les échelles par le théorème de distorsion de Koebe et en déduire (10).

L'assertion (10) implique qu'aucun point de J_x ne peut être un point de densité; donc J_x est de mesure de Lebesgue nulle. \square

Le théorème 4.2 garantit que sous l'hypothèse d'hyperbolicité, l'inclusion $\bigcup_{x \in X} \{x\} \times J_x \subset J$ est en fait une égalité. En revanche, l'inclusion $J \subset \partial K$ peut demeurer stricte (i.e. $x \mapsto K_x$ n'est pas continue) comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 4.1. — Notons X le compact $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2\}$. Soit f la fonction continue de X dans \mathbb{C} ayant 0 et 2 comme points fixes, définie par :

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-1} \quad \text{si } n > 1, \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = f(2) = 2.$$

Définissons également $c \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ par $c(x) = 0$ pour $x \in X \setminus \{2\}$ et $c(2) = -3$. Dans cette situation, il est clair d'après l'assertion 4) que $P : (x, z) \mapsto (f(x), z^2 + c(x))$ est hyperbolique et pourtant

$$\partial K \setminus J = \{0\} \times D(0, 1).$$

Cet exemple montre également, de façon assez surprenante, que P peut être hyperbolique et $\inf_{x \in X} G_x(\Omega_x \cap (\mathbb{C} \setminus K_x)) = 0$.

4.2. Preuve du théorème 4.2.

La démonstration du théorème 4.2 s'organise de la façon suivante. Nous établirons dans un premier temps la suite d'implications $1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$. L'équivalence entre les assertions 1) et 4) a déjà été démontrée par M. Jonsson pour les produits croisés polynômiaux (cf. [Jon97]). Nous vérifierons qu'elle se transpose *mutatis mutandis* à notre contexte où la base X de P est un compact quelconque sans structure complexe ni même différentiable.

Preuve de $1) \Rightarrow 3)$. — Soient $\mu > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in X$ et pour tout $z \in J_x$, on a $|(P_x^N)'(z)| \geq \mu^N > 1$. On définit alors

$$\sigma(x, z) = \sigma_x(z) = (|P'_x(z)| \cdots |(P_x^{N-1})'(z)|)^{\frac{1}{N}}.$$

Notons d_{σ_x} la distance relative à la métrique $\sigma(x, z)|dz|$ et si $\theta > 0$, $D_{\sigma_x}(z, \theta)$ le disque ouvert de centre z et de rayon θ pour la distance d_{σ_x} . Par construction, σ satisfait la relation :

$$(12) \quad \sigma(f(x), P_x(z))|P'_x(z)| = \sigma(x, z)|(P_x^N)'(z)|^{\frac{1}{N}}.$$

Fixons ensuite μ_1 tel que $1 < \mu_1 < \mu$. Soit W_r le voisinage compact de J défini par

$$W_r = \{(x, z) \in X \times \mathbb{C}; d(z, J_x) \leq r\},$$

où $r > 0$ est un réel assez petit de sorte que si $(x, z) \in W_r$, alors $|(P_x^N)'(z)| \geq \mu_1^N > 1$. Soulignons que dans W_r les distances d_{σ_x} et d (euclidienne) sont équivalentes.

Ainsi, le polynôme P_x est expansif pour la distance d_{σ_x} dans la mesure où pour tout $\omega \in J_x$ et $z, z' \in D(\omega, r)$, on a :

$$(13) \quad d_{\sigma_{f(x)}}(P_x(z), P_x(z')) \geq \mu_1 d_{\sigma_x}(z, z').$$

Soit $\theta > 0$; on définit

$$\Lambda_{x,\theta} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } d_{\sigma_x}(z, J_x) \leq \theta\}.$$

On réduit éventuellement θ de telle sorte que pour tout x de X , on a $\{x\} \times \Lambda_{x,2\theta} \subset W_r$ et

$$(14) \quad D_{\sigma_{f(x)}}(P_x(\omega), 2\theta) \subset P_x(D(\omega, r)).$$

Choisissons V_x l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{x,\theta}$; il vérifie $P_x(V_x) \subset V_{f(x)}$ et $\Omega_x \subset V_x$. Il reste donc à prouver que $d_{\sigma_{f(x)}}(P_x(\bar{V}_x), \partial V_{f(x)})$ est uniformément minorée. À cet effet, fixons $Z_1 \in \partial P_x(\bar{V}_x)$ et $Z_2 \in \partial V_{f(x)}$ tels que $d_{\sigma_{f(x)}}(Z_1, Z_2) \leq \theta$. Considérons également $Z_3 \in J_{f(x)}$ tel que $d_{\sigma_{f(x)}}(Z_2, Z_3) = \theta$. Soient $z_1 \in \partial V_x$ et $z_3 \in J_x$ des images de Z_1 et Z_3 par la même branche inverse de P_x . Donc, d'après (14), $|z_1 - z_3| \leq r$. Il en résulte, compte-tenu également que $d_{\sigma_x}(z_1, z_3) \geq \theta$:

$$d_{\sigma_{f(x)}}(Z_1, Z_2) + d_{\sigma_{f(x)}}(Z_2, Z_3) \geq d_{\sigma_{f(x)}}(Z_1, Z_3) \geq \mu_1 d_{\sigma_x}(z_1, z_3) \geq \mu_1 \theta.$$

En définitive, $d_{\sigma_{f(x)}}(Z_1, Z_2) \geq (\mu_1 - 1)\theta$ et par conséquent :

$$d_{\sigma_{f(x)}}(P_x(\bar{V}_x), \partial V_{f(x)}) \geq \inf\{\theta, (\mu_1 - 1)\theta\}.$$

Comme la métrique $\sigma(x, z)|dz|$ est équivalente à la métrique euclidienne sur W_r , la distance euclidienne de $P_x(\bar{V}_x)$ à $\partial V_{f(x)}$ est également minorée. \square

L'implication 3) \Rightarrow 2) est immédiate car $V_x \subset U_x(\varepsilon_0) \cup U_x^\infty(\varepsilon_0)$.

Preuve de 2) \Rightarrow 1). — Nous utiliserons à plusieurs reprises le fait que comme la distance de $J_{f^n(x)}$ à $\mathcal{P}\Omega_{f^n(x)}$ est supérieure à ε_0 , les branches inverses de P_x^n sont définies et univalentes dans $D(P_x^n(z), \varepsilon_0)$, ceci pour tout $x \in X$, $z \in J_x$ et $n \in \mathbb{N}$. Le point principal de cette implication réside dans la proposition ci-dessous valable sous les hypothèses de l'assertion 2).

PROPOSITION 4.4. — Il existe un entier N_0 tel que pour tout $x \in X$ et pour tout $z \in J_x$, il existe $N \leq N_0$ tel que si $Z = P_x^N(z)$ et g_N est la branche inverse de P_x^N vérifiant $g_N(Z) = z$, alors

$$g_N(D(Z, \frac{1}{2}\varepsilon_0)) \subset D(z, \frac{1}{4}\varepsilon_0).$$

Cette proposition garantit l'expansivité uniforme de P sur J . En effet, comme $g_N(D(Z, \frac{1}{2}\varepsilon_0)) \subset D(z, \frac{1}{4}\varepsilon_0)$, d'après le lemme de Schwarz $|g'_N(Z)| \leq \frac{1}{2}$. D'où $|(P_x^N)'(z)| \geq 2$. On obtient ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in X$ et pour tout $z \in J_x$:

$$|(P_x^n)'(z)| \geq A 2^{[n/N_0]} \geq \frac{1}{2} A (2^{1/N_0})^n$$

où

$$A = \min_{k \leq N_0} \inf_{(x,z) \in J} |(P_x^k)'(z)|.$$

Preuve de la proposition 4.4. — Tout d'abord, pour tout $x \in X$, $z \in J_x$ et $n \in \mathbb{N}$, si g_n est la branche inverse de P_x^n telle que $g_n(P_x^n(z)) = z$, alors

$$g_n(D(P_x^n(z), \frac{1}{2}\varepsilon_0)) \subset D(0, R^*(P)),$$

où $R^*(P)$ est le rayon d'échappement de P . D'après la formule de Cauchy, il existe k une constante positive ne dépendant que de $R^*(P)$ et ε_0 telle que $|g'_n(P_x^n(z))| \leq k$.

Supposons ensuite par l'absurde que la proposition 4.4 soit fautive, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe (y_n, t_n) avec $t_n \in J_{y_n}$ tel que pour tout $m \leq n$:

$$(15) \quad g_n^m(D(t_n^m, \frac{1}{2}\varepsilon_0)) \not\subset D(t_n, \frac{1}{4}\varepsilon_0),$$

où l'on a noté $t_n^m = P_{y_n}^m(t_n)$ et g_n^m la branche inverse de $P_{y_n}^m$ telle que $g_n^m(t_n^m) = t_n$.

Considérons alors une valeur d'adhérence $(x_0, z_0) \in J$ de $(y_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le point z_0 n'appartient pas forcément à J_{x_0} ; en revanche, $z_0 \in K_{x_0}$. Notons $z_m = P_{x_0}^m(z_0)$ et g_m la branche inverse de $P_{x_0}^m$ telle que $g_m(z_m) = z_0$. Comme la suite $(y_n, t_n) \in J$, l'hypothèse 2) garantit que $d(t_n, \mathcal{P}\Omega_{y_n}) \geq \varepsilon_0$. Après passage à la limite, compte-tenu que $x \mapsto \Omega_x$ est continue, on a $d(z_m, \mathcal{P}\Omega_{f^m(x_0)}) \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0$ pour tout m . L'application g_m est donc univalente sur $D(z_m, \frac{1}{2}\varepsilon_0)$ et bornée par $R^*(P)$. Par passage à la limite dans (15), on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$(16) \quad g_m(D(z_m, \frac{1}{2}\varepsilon_0)) \not\subset D(z_0, \frac{1}{8}\varepsilon_0).$$

Donc, d'après le théorème de distorsion de Koebe, il existe des constantes universelles k_1 et k_2 telles que :

$$(17) \quad g_m \left(D \left(z_m, \frac{\varepsilon_0}{k_2} \right) \right) \subset D \left(z_0, \frac{\varepsilon_0}{k_1} \right) \subset g_m \left(D \left(z_m, \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right) \right).$$

De ces inclusions on tire $D(z_0, \varepsilon_0/k_1) \subset K_{x_0}$ et $D(z_m, \varepsilon_0/k_2) \subset K_{f^m(x_0)}$. Notons V la composante connexe de l'intérieur de K_{x_0} qui contient z_0 . Nous avons alors le :

LEMME 4.5. — Soit $\lambda > 1$; il existe $n_0 > 0$ tel que pour tout $z \in \partial V$ et pour tout $n \geq n_0$,

$$|(P_{x_0}^n)'(z)| > \lambda.$$

Vérifions tout de suite que ce lemme permet d'achever la preuve de la proposition 4.4. Soit N_0 l'entier obtenu en appliquant le lemme 4.5 à $\lambda = 4$. Supposons par l'absurde que $P_{x_0}^{N_0}$ soit univalente sur V . Alors, en vertu du principe de minimum, pour tout $z \in V$, on a $|(P_{x_0}^{N_0})'(z)| \geq 4$. D'où $|g'_{N_0}(z)| \leq \frac{1}{4}$ pour tout $z \in D(z_{N_0}, \frac{1}{2} \varepsilon_0)$, et

$$g_{N_0} \left(D \left(z_{N_0}, \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right) \right) \subset D \left(z_0, \frac{1}{8} \varepsilon_0 \right),$$

ce qui contredit (16) et assure que $P_{x_0}^{N_0}$ a au moins un point critique dans V que l'on note ω . D'après le corollaire 3.6 et l'hypothèse $(\Omega \cap K) \subset U(\varepsilon_0)$, on a

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |P_{x_0}^n(\omega) - z_n| = 0.$$

Or, comme nous l'avons souligné plus haut $d(z_n, \mathcal{P}\Omega_{f^n(x_0)}) \geq \frac{1}{2} \varepsilon_0$ ce qui contredit clairement (18) et prouve la proposition. \square

Preuve du lemme 4.5. — Rappelons que k désigne une constante telle que $|(P_x^n)'(z)| \geq 1/k$ pour tout $(x, z) \in J$. Ensuite, soient $z \in \partial V$ et

$$N = N(z) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} ; P_{x_0}^n \left(D \left(z, \frac{\varepsilon_0}{8\lambda k} \right) \right) \not\subset D \left(P_{x_0}^n(z), \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right) \right\}.$$

En appliquant les inégalités de Koebe à g_N définie sur $D(P_{x_0}^N(z), \frac{1}{2} \varepsilon_0)$, on obtient :

$$(19) \quad |(P_{x_0}^N)'(z)| \geq \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0}{\varepsilon_0 / (8\lambda k)} \geq 2\lambda k.$$

Par continuité, il existe $\varepsilon(z) > 0$ tel que $|(P_{x_0}^N)'(\tilde{z})| \geq \lambda k$ pour tout $\tilde{z} \in D(z, \varepsilon(z)) \cap \partial V$. Ainsi, $|(P_{x_0}^n)'(\tilde{z})| \geq \lambda$ pour tout $n \geq N$. On recouvre alors ∂V par un nombre fini de disques $D(z_i, \varepsilon(z_i))$ pour $1 \leq i \leq i_0$ et le lemme est établi pour $n_0 = \max_{1 \leq i \leq i_0} N(z_i)$. \square

Preuve de 4) \Leftrightarrow 1). — L'implication 1) \Rightarrow 4) résulte du fait que $x \mapsto J_x$ est continue et que $d(\mathcal{P}\Omega_x, J_x) \geq \delta_0$. Pour ce qui concerne la réciproque, nous allons montrer que sous l'hypothèse $\overline{\mathcal{P}\Omega} \cap J = \emptyset$, la proposition 4.4 est encore vraie. Comme nous l'avons déjà souligné plus haut, celle-ci implique l'hyperbolicité de P .

De nouveau, par l'absurde on suppose (après passage à la limite) qu'il existe $(x_0, z_0) \in J$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$(20) \quad g_m \left(D \left(z_m, \frac{\varepsilon_0}{k_2} \right) \right) \subset D \left(z_0, \frac{\varepsilon_0}{k_1} \right) \subset g_m \left(D \left(z_m, \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right) \right)$$

où $z_m = P_{z_0}^m(x_0)$ et g_m est la branche inverse de $P_{x_0}^m$ telle que $g_m(z_m) = z_0$. Notons V la composante connexe de l'intérieur de K_{x_0} contenant z_0 .

Soit $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $(P_{x_0}^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions uniformément convergente sur tout compact de V . On suppose, en outre, que $P^{n_k}(x_0, z_0) = (x_k, \tilde{z}_k)$ admet une limite notée (x_∞, z_∞) . En suivant [Jon97], on note $S_{k,\ell} = P_{x_\ell}^{n_k - n_\ell}$ pour $\ell \leq k$, et on considère l'ensemble W des $z \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec

$$(21) \quad \limsup_{\ell \rightarrow +\infty} \sup_{k > \ell} \sup_{|\xi - z| \leq \varepsilon} |S_{k,\ell}(\xi) - \xi| = 0.$$

L'ensemble W est ouvert et d'après (20), $D(z_\infty, \varepsilon_0/2k_2) \subset W$. La contradiction va provenir des deux inclusions suivantes :

$$\{x_\infty\} \times \partial W \subset J \quad \text{et} \quad \{x_\infty\} \times \partial W \subset \overline{\mathcal{P}\Omega}.$$

Montrons tout d'abord que $\{x_\infty\} \times \partial W \subset J$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $z \in \partial W$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout voisinage U de x_∞ et pour tout $x \in U$,

$$(22) \quad D(z, \varepsilon) \cap J_x = \emptyset.$$

D'après (21), $D(z, \varepsilon) \cap K_{x_\ell} \neq \emptyset$ pour tout $\ell \geq \ell_0$. Par conséquent, (22) implique $D(z, \varepsilon) \subset K_{x_\ell}$ pour tout $\ell \geq \ell_0$. Ainsi, les domaines $S_{k,\ell}(D(z, \varepsilon))$ sont bornés par $R^*(P)$ pour ℓ assez grand. Donc $(S_{k,\ell})_{k,\ell \in \mathbb{N}}$ est une famille normale de fonctions analytiques sur $D(z, \varepsilon)$ qui converge uniformément vers l'identité sur un disque centré en $\tilde{z} \in D(z, \frac{1}{2}\varepsilon) \cap W$. On en déduit

$$\limsup_{\ell \rightarrow +\infty} \sup_{k > \ell} \sup_{|\xi - z| \leq \frac{2}{3}\varepsilon} |S_{k,\ell}(\xi) - \xi| = 0.$$

D'où $D(z, \frac{2}{3}\varepsilon) \subset W$, ce qui est absurde.

Montrons à présent que $\{x_\infty\} \times \partial W \subset \overline{\mathcal{P}\Omega}$ en supposant par l'absurde que $z \in \partial W$ et $(x_\infty, z) \notin \overline{\mathcal{P}\Omega}$. Soit U un voisinage de (x_∞, z) tel que $|\omega - z| > \delta > 0$ pour tout $(x, \omega) \in U \cap \overline{\mathcal{P}\Omega}$. Fixons $z^* \in D(z, \frac{1}{2}\delta) \cap W$ et notons $g_{k,\ell}$ une branche inverse de $S_{k,\ell}$ définie sur $D(z, \delta)$ telle que, pour ℓ assez grand, $g_{k,\ell}(z^*) \in D(z, \frac{1}{2}\delta)$.

Comme précédemment, $(g_{k,\ell})_{k,\ell \in \mathbb{N}}$ est une famille normale de fonctions analytiques qui converge uniformément vers l'identité sur un disque centré en z^* . Il en découle

$$\limsup_{\ell \rightarrow +\infty} \sup_{k > \ell} \sup_{|\xi - z| \leq \frac{2}{3}\delta} |g_{k,\ell}(\xi) - \xi| = 0.$$

D'où $g_{k,\ell}(D(z, \frac{2}{3}\delta)) \supset D(z, \frac{1}{2}\delta)$ pour ℓ assez grand. En posant $Z = g_{k,\ell}(\xi)$, on obtient :

$$\limsup_{\ell \rightarrow +\infty} \sup_{k > \ell} \sup_{|Z - z| \leq \frac{1}{2}\delta} |S_{k,\ell}(Z) - Z| = 0.$$

Ainsi, $D(z, \frac{1}{2}\delta) \subset W$, ce qui contredit à nouveau $z \in \partial W$ et prouve la proposition 4.4. \square

5. La cardioïde principale généralisée

Nous concentrons désormais nos efforts sur le cas des polynômes quadratiques ($d = 2$) et nous supposons conformément au premier paragraphe que $P_x(z) = c_2(x)z^2 + c_0(x)$, avec $c = (c_2, c_0)$ un élément de $\mathcal{C}_2(X)$. On note $\mathcal{M}_2(X, f)$ le lieu de connexité pour les polynômes fibrés de degré 2, c'est-à-dire les $c \in \mathcal{C}_2(X)$ tels que K_x soit connexe pour tout x de X .

L'objet de ce paragraphe est de définir $\mathcal{M}_2^0(X, f)$, un sous-ensemble ouvert du lieu de connexité constitué de paramètres hyperboliques et qui généralise à notre contexte fibré la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot. Rappelons que celle-ci est constituée des $c \in \mathbb{C}$ tels que $z \mapsto z^2 + c$ possède un point fixe attractif. Nous voulons que les éléments de $\mathcal{M}_2^0(X, f)$ conservent certaines propriétés de ceux de la cardioïde comme, par exemple, le fait que les ensembles de Julia remplis associés soient des quasidisques.

5.1. Énoncé du théorème principal.

Dans un premier temps, on détermine une borne explicite des ensembles de Julia remplis correspondant à des paramètres de $\mathcal{M}_2(X, f)$.

PROPOSITION 5.1. — *Si K_x est connexe pour tout x (i.e. $0 \in K_x$), alors K_x est inclus dans $\overline{D}(0, 2)$.*

Preuve. — La proposition résulte du fait que si un compact connexe du plan est de diamètre d , alors sa capacité logarithmique est $\geq \frac{1}{4}d$. Ici, d'après le corollaire 2.5, nous savons que K_x est de capacité 1 donc $\text{diam}(K_x) \leq 4$. Comme K_x est symétrique par rapport à 0, nous obtenons $K_x \subset \overline{D(0, 2)}$. \square

REMARQUE. — La proposition fournit également une borne du lieu de connexité par 2 (i.e. $|c_0(x)| \leq 2$).

Rappelons que F_x désigne l'intérieur de K_x et on note

$$F = \{(x, z) \text{ tels que } z \in F_x\}.$$

D'une façon générale, si V est un ouvert connexe de \mathbb{C} contenant a , d_V désigne la distance hyperbolique relative à V et $B_V(a, R)$ la boule hyperbolique ouverte de centre a et de rayon R . La distance euclidienne standard de \mathbb{C} est toujours notée d . Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème principal de ce paragraphe.

THÉORÈME 5.2. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) P est hyperbolique et F_x est connexe et non vide pour tout $x \in X$.
- 2) Il existe $m_0 > 0$ et une famille $(V_x)_{x \in X}$ de domaines de Jordan vérifiant pour tout $x \in X$:

$$D(0, m_0) \subset V_x \subset F_x, \quad P_x(\overline{V_x}) \subset V_{f(x)}, \quad \text{mod}(P_x^{-1}(V_{f(x)}) \setminus \overline{V_x}) \geq m_0.$$

- 3) Il existe $\kappa \geq 1$ et $r_0 \in]0; 1[$ tels que pour tout x de X , il existe un homéomorphisme Φ_x de \mathbb{C} , κ -quasiconforme, prolongeant φ_x et vérifiant $\Phi_x(0) = 0$ et pour $|z| \geq r_0$:

$$P_x(\Phi_x(z)) = \Phi_{f(x)}(c_2(x)z^2).$$

- 4) Pour tout x , F_x est connexe et non vide; en outre, il existe $k > 0$ tel que :

$$d_{F_{f^n(x)}}(0, P_x^n(0)) < k, \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- 5) Pour tout x , F_x est connexe et non vide, en outre il existe un entier $N \geq 1$ et $\lambda \in]0; 1[$ tels que :

$$|(P_{f^m(x)}^N)'(P_x^m(0))| \leq \lambda, \quad \forall x \in X, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

- 6) Pour tout x , F_x est connexe et non vide; en outre il existe ε_0 tel que pour tout $x \in X$, toute ε_0 -pseudoorbite issue de $(x, 0)$ est bornée.

- 7) Pour tout x , F_x est connexe et non vide; en outre il existe δ_0 tel que $d(\mathcal{P}\Omega_x, J_x) \geq \delta_0$ pour tout $x \in X$.

On appellera $\mathcal{M}_2^0(X, f)$ l'ensemble des paramètres $c \in \mathcal{M}_2(X, f)$ qui satisfont l'une de ces sept propriétés. Nous savons déjà d'après le théorème 4.2 que les propriétés 1), 6) et 7) sont équivalentes ; nous les avons incluses dans l'énoncé de ce théorème pour avoir une caractérisation de $\mathcal{M}_2^0(X, f)$ la plus complète possible.

Signalons dès à présent que dans la propriété 2), il n'est pas nécessaire d'avoir des domaines de Jordan. En effet, compte tenu des minoration du diamètre intérieur de V_x et du module de l'anneau $P_x^{-1}(V_{f(x)}) \setminus \overline{V}_x$, si V_x est un ouvert simplement connexe satisfaisant 2), il est toujours possible de le réduire légèrement pour obtenir un domaine de Jordan tout en conservant cette propriété.

L'exemple 4.1 nous a montré que, même sous l'hypothèse d'hyperbolicité, $x \mapsto K_x$ pouvait ne pas être continue. Cependant, dans le cas de la cardiïde généralisée nous avons :

COROLLAIRE 5.3. — *Si $c \in \mathcal{M}_2^0(X, f)$, alors l'application $x \mapsto K_x$ est continue pour la distance de Hausdorff.*

Preuve. — D'après la proposition 2.9, il suffit de montrer que $x \mapsto K_x$ est semi-continue inférieurement. À cet effet, on montre l'affirmation suivante : si $z \in F_x$, alors z appartient également à $F_{x'}$ pour tout x' assez proche de x . De la proposition 6, du théorème ci-dessus et du corollaire 3.6, on déduit que $|P_x^n(z) - P_x^n(0)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, si N est assez grand et x' suffisamment proche de x , $|P_{x'}^N(z) - P_{x'}^N(0)| < \frac{1}{2}\varepsilon_0$, ce qui garantit que $P_{x'}^N(z) \in F_{f^N(x')}$ donc $z \in F_{x'}$. Cette propriété combinée avec la continuité de $x \mapsto J_x$ implique alors le corollaire. \square

Mentionnons d'autres conséquences immédiates du théorème ci-dessus.

1) La propriété 2) garantit que $\mathcal{M}_2^0(X, f)$ est un ouvert de $\mathcal{C}_2(X)$ pour la topologie de la norme uniforme.

2) Si $c \in \mathcal{M}_2^0(X, f)$, de la preuve du corollaire 5.3 on déduit que $F = \{(x, z), z \in F_x\}$ est un ouvert de $X \times \mathbb{C}$ et $J = \partial F$.

3) L'assertion 3) implique que K_x est un κ -quasidisque avec κ indépendant de x .

4) Si f est un homéomorphisme de X , alors P admet une unique section invariante attractive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, un entier $n_0 \geq 1$ et $\rho \in]0; 1[$ tels que $P_x(\alpha(x)) = \alpha(f(x))$, $\alpha(x) \in F_x$ et $|(P_x^{n_0})'(\alpha(x))| \leq \rho$, pour tout x de X . Celle-ci est définie en posant :

$$\alpha(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_{f^{-n}(x)}^n(\overline{B_{U_{f^{-n}(x)}}}(0, 2k)),$$

où k est le réel donné par l'assertion 4) du théorème 5.2.

Présentons tout de suite quelques exemples d'éléments de $\mathcal{M}_2^0(X, f)$.

EXEMPLES 5.1.

(i) Si $c(x) = (1, \gamma_0)$ avec γ_0 un élément de la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot, alors $K_x = K_{\gamma_0}$ pour tout $x \in X$, où K_{γ_0} est le Julia rempli de $z \mapsto z^2 + \gamma_0$.

(ii) Si $c = (c_2, c_0)$ appartient à $\mathcal{C}_2(X)$ avec $|c_0(x)| < \frac{1}{4} - \varepsilon$, alors $c \in \mathcal{M}_2^0(X, f)$. Tout d'abord, on constate que $D(0, \frac{1}{2}) \subset K_x$ car si $|z| \leq \frac{1}{2}$ alors $|c_2(x)z^2 + c_0(x)| < \frac{1}{2} - \varepsilon$. Ensuite, on pose $V_x = D(0, \frac{1}{2})$ et d'après la caractérisation 2), on en déduit que $c \in \mathcal{M}_2^0(X, f)$. Cet exemple correspond à ce que S. Heinemann appelle les «Cantor skews» (voir [Hei96]).

Enfin, nous donnons un exemple de paramètre de $\mathcal{M}_2(X, f)$ n'appartenant pas à $\mathcal{M}_2^0(X, f)$, qui illustre dans quelle mesure des phénomènes nouveaux (par rapport à la situation classique) peuvent intervenir.

EXEMPLE 5.2. — Reprenons le compact (X, f) et l'application de l'exemple 4.1. Si δ est un réel fixé tel que $0 < \delta < 1$, on définit un élément $c = (1, c_0)$ de $\mathcal{C}_2(X)$ par $c_0(0) = c_0(2) = 0$ et $c_0(1/n) = \delta^{n-1} - \delta^{2n}$ si $n > 0$. Ainsi, $K_0 = K_2 = \overline{\mathbb{D}}$ et par récurrence, on montre très facilement que $K_{1/n} \cap \mathbb{R} = [-\delta^n; \delta^n]$. Ce qui prouve que $0 \in K_{1/n}$ d'où $c \in \mathcal{M}_2(X, f)$. En revanche, $d(0, \partial K_{1/n}) \leq \delta^n$ donc $c \notin \mathcal{M}_2^0(X, f)$ (cf. figure 1). Remarquons également que dans cette situation pour tout $x \in X$, K_x est un k_x -quasidisque et $0 \in U_x(\varepsilon_x)$ avec

$$\sup_{x \in X} k_x = +\infty \quad \text{et} \quad \inf_{x \in X} \varepsilon_x = 0.$$

Cet exemple montre bien la nécessité d'avoir des constantes uniformes (par rapport à x) dans l'énoncé du théorème. La compacité de la base ne suffit pas à garantir *a priori* cette uniformité.

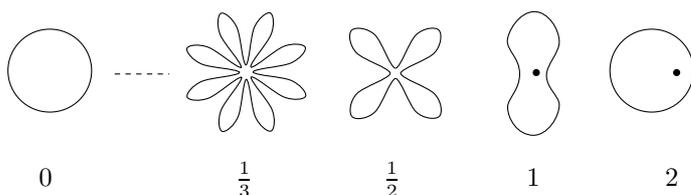


Figure 1

5.2. Preuve du théorème principal.

Cette section est entièrement consacrée à la preuve du théorème 5.2. Observons tout d’abord que chacune des assertions 1) à 7) assure que F_x est non vide. Compte-tenu du théorème 4.2 et de l’hypothèse de connexité de F_x , les assertions 1), 6) et 7) sont équivalentes. La démonstration s’organise alors de la façon suivante. Dans un premier temps, nous établirons les équivalences entre 1) et 2) d’une part, 2) et 3) d’autre part. Ensuite, on reliera l’assertion 4) aux autres propriétés en montrant 2) \Rightarrow 4) et 4) \Rightarrow 7). Enfin, on montrera les implications 2) \Rightarrow 5) et 5) \Rightarrow 6).

Preuve de 1) \iff 2). — L’implication 2) \Rightarrow 1) découle du théorème 4.2. En effet, la famille de domaines $(V_x)_{x \in X}$ garantit que F_x est non vide pour tout x et assure l’hyperbolicité du polynôme fibré en question. Concernant la connexité de F_x , supposons que \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 soient deux composantes connexes de F_x . D’après la proposition 3.2, il existe des entiers n_1 et n_2 tels que $0 \in P_x^{n_1}(\mathcal{O}_1)$ et $0 \in P_x^{n_2}(\mathcal{O}_2)$. Comme $\mathcal{P}\Omega_{f^n(x)} \subset V_{f^n(x)} \subset F_{f^n(x)}$, on a $P_x^{n_0}(\mathcal{O}_1) = P_x^{n_0}(\mathcal{O}_2)$ pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$. De l’égalité

$$V_{f^n(x)} = P_{f^n(x)}^{-1}(V_{f^{n+1}(x)}),$$

on déduit par récurrence descendante que $P_x^n(\mathcal{O}_1)$ et $P_x^n(\mathcal{O}_2)$ contiennent chacun $V_{f^n(x)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d’où $P_x^n(\mathcal{O}_1) = P_x^n(\mathcal{O}_2)$ et $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

Pour ce qui concerne la réciproque, reprenons la preuve de l’implication 1) \Rightarrow 3) dans le théorème 4.2. On conserve les notations pour $\Lambda_{x,\theta}$ et W_r . On a toujours $\mu_1 > 1$ et $|(P_x^N)'(z)| \geq \mu_1^N > 1$ pour $(x, z) \in W_r$. Soit V_x la composante connexe de $F_x \setminus (\Lambda_{x,\theta} \cap F_x)$ contenant 0. D’après la proposition 5.1, si $z \in K_x$ alors $|z| \leq 2$ donc $|P_x'(z)| \leq 4$. D’où

$$|(P_x^N)'(z)| = |2z(P_{f(x)}^{N-1})'(P_x(z))| \leq 2 \cdot 4^{N-1}|z|,$$

et le disque $D_1 = D(0, \mu_1/4^N)$ est inclus dans V_x . L’assertion 2) va découler du lemme suivant.

LEMME 5.4. — *Si θ est assez petit, alors $P_x(V_x) \subset V_{f(x)}$.*

Le lemme résulte de l’inclusion $P_x(D_1) \subset V_{f(x)}$ que nous allons prouver par l’absurde. Supposons qu’il existe une suite d’éléments $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X telle que D_1 et $P_{x_n}(D_1)$ appartiennent à des composantes connexes distinctes du complémentaire de $\Lambda_{x_n, 1/n}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \tilde{x} . De la continuité de l’application $x \mapsto J_x$, on déduit que D_1 et $P_{\tilde{x}}(D_1)$ appartiennent à des

composantes distinctes du complémentaire de $\Lambda_{\tilde{x},1/n}$, ceci pour tout n de \mathbb{N} . Ce dernier point entraîne que D_1 et $P_{\tilde{x}}(D_1)$ appartiennent à des composantes distinctes de $F_{f(\tilde{x})}$, ce qui est impossible.

Enfin, la minoration du module de l'anneau $\text{mod}(P_x^{-1}(V_{f(x)}) \setminus \overline{V_x})$ provient de celle de $d(\partial V_{f(x)}, P_x(\overline{V_x}))$ établie au théorème 4.2. \square

Preuve de 3) \Rightarrow 2). — Posons $V_x = \Phi_x(D(0, r_0))$ et $W_x = P_x^{-1}(V_{f(x)})$; alors par hypothèse $P_x(V_x) = \Phi_{f(x)}(D(0, r_0^2))$. Il suffit pour démontrer l'assertion 2 de s'assurer des minorations du diamètre intérieur de V_x et du module de l'anneau $V_{f(x)} \setminus P_x(\overline{V_x})$. Comme Φ_x est κ -quasiconforme :

$$\text{mod}(V_{f(x)} \setminus P_x(\overline{V_x})) \geq \frac{1}{\kappa} \text{mod}(D(0, r_0) \setminus \overline{D(0, r_0^2)}) =: m_0.$$

Par ailleurs, les applications $(\Phi_x)_{x \in X}$ forment une famille normale. En effet, elles sont κ -quasiconformes, holomorphes dans un voisinage de l'infini et tangentes à l'identité en l'infini. Il en découle l'existence d'une constante m_1 ne dépendant que de κ et de r_0 telle que $D(0, m_1) \subset \Phi_x(D(0, r_0)) = V_x$. \square

Preuve de 2) \Rightarrow 3). — Étant donné V_x , on note $W_x = P_x^{-1}(V_{f(x)})$ et $\mathcal{A}(x) = W_x \setminus \overline{V_x}$. Le point clef de cette implication est le lemme suivant.

LEMME 5.5. — *Il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout x de X , il existe un difféomorphisme η_x κ -quasiconforme de \mathbb{C} , holomorphe sur $V_{f(x)}$ qui coïncide avec l'identité sur le complémentaire de $W_{f(x)}$ et qui vérifie $\eta_x(c_2(x)) = 0$.*

Vérifions tout d'abord que ce lemme permet effectivement de conclure que 2) \Rightarrow 3). Soit $\tilde{P}_x = \eta_x \circ P_x$, pour tout $x \in X$. En suivant [CG92], on définit un champ d'ellipses σ_x en prenant le champ de cercles sur $\mathbb{C} \setminus K_x \cup V_x$, et en le choisissant invariant par \tilde{P}_x sur

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (\tilde{P}_x^n)^{-1}(\mathcal{A}(f^n(x)))$$

avec la convention $\tilde{P}_x^n = \tilde{P}_{f^{n-1}(x)} \circ \dots \circ \tilde{P}_x$.

Comme les ensembles $(\tilde{P}_x^n)^{-1}(\mathcal{A}(f^n(x)))$ pour $n \in \mathbb{N}$, sont disjoints, σ_x est bien défini. Notons μ_x le coefficient de Beltrami de σ_x et prolongeons μ_x par 0 sur les parties de \mathbb{C} où μ_x n'est pas encore défini. Par construction, les cercles ne sont distordus qu'à la première itération car \tilde{P}_x est analytique sur le complémentaire de $\mathcal{A}(x)$; donc :

$$\forall x \in X, \quad \|\mu_x\|_{\infty} \leq \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} < 1.$$

Considérons alors la solution ψ_x de l'équation de Beltrami $\bar{\partial}\psi_x = \mu_x\partial\psi_x$ telle que $\psi_x(0) = 0$ et ψ_x est tangente à l'identité en l'infini. Par construction, $\psi_{f(x)} \circ \tilde{P}_x \circ \psi_x^{-1}$ est une application holomorphe de degré 2 avec le point et la valeur critique en 0; donc $\psi_{f(x)} \circ \tilde{P}_x \circ \psi_x^{-1}(z) = c_2(x)z^2$.

Remarquons que $\tilde{P}_x = P_x$ sur le complémentaire de $P_x^{-1}(W_{f(x)})$ et que ψ_x est holomorphe sur V_x . Nous avons également, du fait de la κ -quasiconformité de ψ_x :

$$\text{mod}(\mathbb{D} \setminus \psi_x(\bar{V}_x)) \geq \text{mod}(\psi_x(W_x) \setminus \psi_x(\bar{V}_x)) \geq \frac{1}{\kappa}m_0,$$

et

$$\text{mod}(\mathbb{D} \setminus \overline{\psi_x(P_x^{-1}(W_{f(x)})))} \geq C_0,$$

où C_0 est une constante indépendante de x . Du théorème extrémal de Grötzsch [LV78], on tire l'existence d'un réel $0 < r_0 < 1$ tel que pour tout x de X , $\psi_x(P_x^{-1}(W_{f(x)})) \subset D(0, r_0)$. On obtient alors la propriété 3) en considérant $\Phi_x = \psi_x^{-1}$. \square

Preuve du lemme 5.5. — Comme nous l'avons déjà remarqué, on peut supposer que le bord de $\mathcal{A}(x)$ est constitué de deux courbes de Jordan. En fait, quitte à réduire encore un peu les ouverts V_x , on peut supposer que $\mathcal{A}(x)$ est l'image de l'anneau $\mathbb{D} \setminus D(0, \frac{1}{2})$ par un difféomorphisme H_x K -quasiconforme, de norme C^1 uniformément bornée en x . Soit θ_x une représentation conforme de $V_{f(x)}$ sur \mathbb{D} avec $\theta_x(0) = 0$ et $\theta_x(c_2(x)) = a_x$. Soit φ_{a_x} la bijection holomorphe de \mathbb{D} définie par

$$\varphi_{a_x}(z) = \frac{z + a_x}{1 + z\bar{a}_x}.$$

On pose alors $\eta_x = \theta_x^{-1} \circ \varphi_{a_x} \circ \theta_x$. Pour l'instant, η_x est définie et holomorphe sur $V_{f(x)}$. Comme $|a_x| < 1 - \delta < 1$, η_x est de norme C^1 uniformément bornée sur $V_{f(x)}$. Nous pouvons alors prolonger η_x de façon κ -quasiconforme à $\mathcal{A}(f(x))$ pour coïncider avec l'identité sur le bord extérieur de $\mathcal{A}_{f(x)}$. En effet, par $H_{f(x)}$, on se ramène au problème du recollement entre un difféomorphisme de $\partial D(0, \frac{1}{2})$ de norme C^1 bornée, avec l'identité sur \mathbb{S}^1 . Cette opération ne pose aucun problème et fournit une extension κ -quasiconforme de η_x qui coïncide avec l'identité sur ∂W_x . \square

Preuve de 4) \Rightarrow 7). — Cette implication tient essentiellement aux estimations de Koebe. Dans un premier temps nous allons montrer le :

LEMME 5.6. — *Sous les hypothèses de l'assertion 4), il existe $\rho > 0$ tel que $d(0, J_x) \geq \rho$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. — Fixons x dans X . Soient $\delta_x = d(0, J_x)$ et $h_x : \mathbb{D} \rightarrow F_{f(x)}$ une représentation conforme telle que $h_x(0) = c_2(x)$. En vertu du théorème $\frac{1}{4}$ de Koebe, nous avons :

$$|h'_x(0)| \leq 4d(c_2(x), J_{f(x)}) = 4\delta_x^2.$$

Comme $c_2(x)$ et 0 sont à une distance hyperbolique bornée, il existe une constante k_1 qui ne dépend que de k telle que $|c_2(x) - 0| \leq k_1\delta_x^2$. De l'inégalité triangulaire, on déduit pour tout $x \in X$,

$$d(0, J_{f(x)}) \leq |c_2(x) - 0| + d(c_2(x), J_{f(x)}) \leq k_1\delta_x^2 + \delta_x^2.$$

Nous affirmons alors que le lemme est satisfait pour $\rho = 1/2(k_1 + 1)$. En effet, par l'absurde supposons qu'il existe un $x_0 \in X$ tel que $\delta_{x_0} < \rho$. La majoration ci-dessus garantit que $\delta_{f(x_0)} \leq \frac{1}{2}\delta_{x_0}$ et par induction $\delta_{f^n(x_0)} \leq (\frac{1}{2})^n \delta_{x_0}$. D'où

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d(0, J_{f^n(x_0)}) = 0.$$

Comme $c_2(f^n(x_0))$ est à une distance hyperbolique bornée de 0, nous obtenons que $c_2(f^n(x_0))$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|c_2(f^n(x_0))| \leq \frac{1}{4}$. Nous avons alors $D(0, \frac{1}{2}) \subset K_{f^n(x_0)}$ pour tout $n \geq n_0$, car si $|z| \leq \frac{1}{2}$ alors $|P_{f^n(x_0)}^k(z)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$, $d(0, J_{f^n(x_0)}) \geq \frac{1}{2}$ ce qui contredit (23) et termine la preuve du lemme. \square

Maintenant que nous avons établi que $d(0, J_x) \geq \rho$, les représentations conformes de F_x centrées en 0 forment une famille normale de fonctions univalentes et il existe $\delta_0 > 0$ tel que $B_{F_x}(0, k) \subset \{z \in F_x, d(z, J_x) \geq \delta_0\}$, ce qui montre exactement l'assertion 7). \square

Preuve de 2) \Rightarrow 4). — Si $U \subset V$ sont deux disques topologiques, on note $\text{diam}_V(U)$ le diamètre hyperbolique de U relativement à V . Pour tout x de X , on a $V_x \subset F_x$; donc :

$$d_{F_{f^n(x)}}(0, P_x^n(0)) \leq d_{V_{f^n(x)}}(0, P_x^n(0)) \leq \text{diam}_{V_{f^n(x)}}(P_{f^{n-1}(x)}(V_{f^{n-1}(x)})).$$

Par hypothèses, le diamètre euclidien de V_y est majoré par 4 et minoré par m_0 . De l'assertion 2) et du théorème extrémal de Grötzsch, on déduit l'existence d'une constante $k = k(m_0) > 0$ telle que pour tout y de X $\text{diam}_{V_{f(y)}}(P_y(V_y)) \leq k$ d'où $d_{F_{f^n(x)}}(0, P_x^n(0)) \leq k$. \square

Preuve de 2) ⇒ 5). — Soient $W_x = P_x^{-1}(V_{f(x)})$ et $\mathcal{A}(x)$ l'anneau $W_x \setminus \bar{V}_x$. Nous allons prouver qu'il existe $C > 0$ et $\lambda < 1$ tels que pour tout x de X et pour tout z de V_x , $|(P_x^n)'(z)| \leq C\lambda^n$. Fixons x dans X et z dans V_x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons une représentation conforme $g_{f^n(x)}$ de $W_{f^n(x)}$ sur \mathbb{D} , telle que $g_{f^n(x)}(P_x^n(z)) = 0$. D'après le théorème extrémal de Grötzsch, il existe r_0 indépendant de x , $0 < r_0 < 1$ tel que pour tout $n \geq 0$:

$$g_{f^n(x)}(V_{f^n(x)}) \subset D(0, r_0).$$

Ensuite, notons $\tilde{P}_y = g_{f(y)} \circ P_y \circ g_y^{-1}$ pour $y \in \{x, \dots, f^n(x), \dots\}$. Du lemme de Schwarz, on déduit que $|\tilde{P}'_y(0)| \leq r_0$ et par conséquent

$$|(\tilde{P}_{f^{n-1}(x)} \circ \tilde{P}_{f^{n-2}(x)} \circ \dots \circ \tilde{P}_x)'(0)| \leq r_0^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $z \in V_x$ alors $d(z, \partial W_x) \geq \delta_0$ donc, *a fortiori*, $d(P_x^n(z), \partial W_{f^n(x)}) \geq \delta_0$. En vertu du théorème de Koebe, il existe des constantes $C_1(\delta_0)$ et $C_2(\delta_0)$ telles que $C_2(\delta_0) \leq |g'_y(Z)| \leq C_1(\delta_0)$, pour tout $y \in \{x, \dots, f^n(x), \dots\}$ et $Z \in V_y$; d'où en particulier pour $z = 0$

$$|(P_x^n)'(0)| \leq \frac{C_1(\delta_0)}{C_2(\delta_0)} r_0^n. \quad \square$$

Preuve de 5) ⇒ 6). — La dérivée seconde de P_x^N est uniformément bornée sur $X \times D(0, R^*(P))$; donc il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\tilde{\lambda} < 1$ tels que pour tout entier m et pour tout $z \in D(P_x^m(0), \varepsilon_1)$:

$$|(P_{f^m(x)}^N)'(z)| \leq \tilde{\lambda} < 1.$$

Fixons $0 < \lambda^* < \tilde{\lambda}$ tel que $\lambda^* + \tilde{\lambda} < 1$. Si k désigne la constante de Lipschitz de P_x restreint à K_x et $\varepsilon_2 = \lambda^* \varepsilon_1 / Nk^N$, nous affirmons que toute ε_2 -pseudoorbite issue de $(x, 0)$ est bornée. En effet, soit $(f^n(x), z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une ε_2 -pseudoorbite issue de $(x, 0)$. Par construction, pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$|P_{f^q(x)}^N(z_{qN}) - z_{(q+1)N}| \leq \lambda^* \varepsilon_1.$$

Ensuite, par récurrence, on montre que $|P_x^{qN}(0) - z_{qN}| \leq \varepsilon_1$ pour tout q de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} |P_x^{(q+1)N}(0) - z_{(q+1)N}| &\leq |P_x^{(q+1)N}(0) - P_{f^q(x)}^N(z_{qN})| \\ &\quad + |P_{f^q(x)}^N(z_{qN}) - z_{(q+1)N}| \\ &\leq \tilde{\lambda} \varepsilon_1 + \lambda^* \varepsilon_1 < \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Finalement, la suite $(z_{qN})_{q \in \mathbb{N}}$ est bornée. On en déduit immédiatement que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également bornée, d'où $0 \in U_x(\varepsilon_2)$. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [BH88] BRANNER (B.), HUBBARD (J.H.). — *The iteration of cubic polynomials, I : the global topology of parameter space*, Acta Mathematica, t. **160**, 1988.
- [CG92] CARLESON (L.), GAMELIN (T.W.). — *Complex Dynamics*. — Springer-Verlag, 1992.
- [Doo84] DOOB (J.L.). — *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*. — Springer-Verlag, 1984.
- [Dou94] DOUADY (A.). — *Does a Julia set depend continuously on the polynomial ?*, Proc. Symp. App. Math., t. **49**, 1994, p. 91–135.
- [DH84] DOUADY (A.), HUBBARD (J.H.). — *Étude dynamique des polynômes complexes*. — Publications Mathématiques Orsay, 1984.
- [Dur86] DUREN (L.). — *Univalent Functions*. — Springer-Verlag, 1986.
- [Hei96] HEINEMANN (S.-M.). — *Julia sets for holomorphic endomorphisms of \mathbb{C}^n* , Ergodic Theory and Dynamical Systems, t. **16**, 1996, p. 1275–1296.
- [Jon97] JONSSON (M.). — *Dynamical Studies in Several Complex Variables*. — Royal Institute of Technology Stockholm, September 1997.
- [LV78] LEHTO (O.), VIRTANEN (K.J.). — *Quasiconformal Mappings*. — Springer-Verlag, 1978.
- [McM94] McMULLEN (C.T.). — *Complex dynamics and Renormalization*. — Princeton University Press, 1994.
- [Ses97] SESTER (O.). — *Étude dynamique des polynômes fibrés*. — Université Paris-Sud, 1997.
- [Ses98] SESTER (O.). — *Configurations combinatoires des polynômes fibrés*, C. R. Acad. Sciences Paris, t. **326**, 1998, p. 477–482.