Zur Geometrie der Möbius-Transformation

HERMANN LUDWIG SCHMID zum Gedächtnis

Von HANS SCHWERDTFEGER in Melbourne[1])

(Eingegangen am 9. 10. 1957)

Die Geraden sind neben den Punkten die Elemente der ebenen projektiven Geometrie. Die fundamentalen Beziehungen zwischen den Punkten zweier Geraden sind die eindimensionalen Projektivitäten, die als Produkte von Perspektivitäten definiert sind. Die Elemente der ebenen konformen Geometrie sind die Kreise, und die Gruppe der zulässigen Transformationen ist die Gruppe der Möbiusschen Kreisverwandtschaften. In der üblichen Darstellung der konformen Geometrie in der durch einen einzigen unendlich fernen Punkt ∞ vervollständigten komplexen Ebene erscheinen gewisse Kreise, nämlich die durch ∞ gehenden, als Geraden. Damit ist nahegelegt, auch in der konformen Geometrie Projektivitäten zwischen Geraden zu betrachten und durch Kreisverwandtschaften darzustellen. Dieser Gedanke soll hier zur Durchführung gebracht werden. Man wird so zu einer Konstruktion der Bildgeraden derjenigen Geraden geführt, die durch Kreisverwandtschaft in Geraden übergeführt werden. Im Falle einer Transformation mit einer invarianten Geraden ist die Konstruktion sehr einfach.

Das System aller Geraden könnte man für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung durch das parabolische Bündel aller Kreise durch einen festen Punkt ersetzen; es ist jedoch praktisch, diesen Punkt nach ∞ zu verlegen.

Punkte der Ebene werden im folgenden durchweg durch komplexe Zahlen dargestellt.

1. Perspektivitäten

Die Punkte z einer Geraden $\mathfrak{l}$ liegen in Perspektive mit den Punkten z' einer Geraden $\mathfrak{l}'$, falls es einen weder auf $\mathfrak{l}$ noch auf $\mathfrak{l}'$ gelegenen Punkt z_0 gibt derart, daß zusammengehörige z, z' mit z_0 kollinear sind. Der Punkt heißt das Zentrum der Perspektivität. Es gilt der *Satz: Jede Perspektivität kann durch eine Möbiussche Transformation dargestellt werden.*

Zum Beweis sei

$$z + w\,\bar{z} = z_0 + w\,\bar{z}_0 \tag{1}$$

[1]) Seit Dezember 1957 in McGill University, Montreal.

die Gleichung einer Geraden durch z_0, in der w ein Parameter vom absoluten Betrag Eins ist. Ist ferner

$$(2) \qquad a z + \bar{a} \bar{z} = a_1 \quad (a \neq 0, \; a_1 \text{ reell})$$

die Gleichung von $\mathfrak{l}$, so haben diese beiden Geraden den Schnittpunkt

$$(3) \qquad z = f_a(w) = \frac{(a_1 - \bar{a} \bar{z}_0)\, w - \bar{a} z_0}{a w - \bar{a}}.$$

Dies ist eine Möbiussche Transformation $w \to z$, deren Determinante $-\bar{a}\,(a_1 - a z_0 - \bar{a} \bar{z}_0)$ nicht verschwindet, da z_0 nicht auf $\mathfrak{l}$ liegt.

Wenn $\mathfrak{l}'$ die Gleichung

$$(4) \qquad b z + \bar{b} \bar{z} = b_1 \quad (\bar{b} \neq 0, \; b_1 \text{ reell})$$

hat, so wird nach dem Muster von (3) $z' = f_b(w)$ der Schnittpunkt von (1) und (4). Die gesuchte Möbius-Transformation, welche die perspektive Abbildung von $\mathfrak{l}$ auf $\mathfrak{l}'$ darstellt, erscheint somit als Produkt

$$z' = f(z) = f_b\left(f_a^{-1}(z)\right) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Ihre Fixpunkte sind erstens der gemeinsame Punkt von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$, d. i.

$$z_0^* = \frac{a_1 \bar{b} - b_1 \bar{a}}{a \bar{b} - b \bar{a}}$$

und zweitens das Zentrum z_0 der Perspektivität; denn $f_a(0) = f_b(0) = z_0$, so daß $f(z_0) = z_0$.

Die beiden Punkte

$$z_\infty = -\frac{\delta}{\gamma} \qquad \text{und } z'_\infty = \frac{\alpha}{\gamma}$$

sind Pol von f bzw. f^{-1}: Es ist $f(z_\infty) = \infty$ und $f(\infty) = z'_\infty$. Die Pole sind entweder beide endlich oder beide unendlich; das letztere ist nur dann der Fall, wenn $f(z)$ ganz linear ist, $\gamma = 0$. Da z_∞ durch f in ∞ übergeführt wird und ∞ ein Punkt von $\mathfrak{l}'$ ist, so ist z_∞ ein Punkt von $\mathfrak{l}$; und da ∞ als Punkt von $\mathfrak{l}$ in z'_∞ übergeht, so ist z'_∞ ein Punkt von $\mathfrak{l}'$. Der Projektionsstrahl $\mathfrak{l}^*$ durch z_∞ (und durch z_0) ist daher parallel zu $\mathfrak{l}'$, und der Strahl $\mathfrak{l}^{*\prime}$ durch z'_∞ (und durch z_0) ist parallel zu $\mathfrak{l}$. Die vier Geraden $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}^*, \mathfrak{l}^{*\prime}$ bilden daher ein eigentliches Parallelogramm, welches das charakteristische Parallelogramm der Transformation f genannt werden möge. Die Fixpunkte z_0, z_0^* und die Pole z_∞, z'_∞ sind die Paare gegenüberliegender Ecken des Parallelogramms[2]).

Es ist leicht einzusehen, daß die Transformation f noch eine zweite Perspektivität darstellt, nämlich die von $\mathfrak{l}^*$ auf $\mathfrak{l}^{*\prime}$ mit dem Zentrum z_0^*.

Die Bedingung, daß Fixpunkte und Pole einer Möbiusschen Transformation f die Paare gegenüberliegender Ecken eines eigentlichen Parallelogramms bilden, wird sich nun auch als hinreichend ergeben dafür, daß f eine Perspektivität darstellt.

---

[2]) Vgl. E. Jacobsthal, Über die Klasseninvariante ähnlicher linearer Abbildungen II, Det Kong. Norske Vidensk. Selskabs Forhandl. 26, 10—15 (1953), wo dieses Parallelogramm anscheinend zum ersten Male erwähnt wird.

2. Projektivitäten

Definitionsgemäß ist eine Projektivität entweder eine Perspektivität, oder sie wird erzeugt durch Hintereinanderausführung mehrerer Perspektivitäten. Es ist mithin klar, daß jede Projektivität von einer Geraden $\mathfrak{l}$ auf eine Gerade $\mathfrak{l}'$ (beide können auch zusammenfallen) auf mindestens eine Weise durch eine Möbiussche Transformation dargestellt werden kann.

Bekanntlich lassen sich drei gegebene Punkte z_1, z_2, z_3 einer Geraden $\mathfrak{l}$ durch Hintereinanderausführung von nicht mehr als zwei Perspektivitäten in drei vorgegebene Punkte z_1', z_2', z_3' einer von $\mathfrak{l}$ verschiedenen Geraden $\mathfrak{l}'$ überführen. Durch eine weitere Projektivität dieser Art ist es möglich, $\mathfrak{l}'$ auf $\mathfrak{l}$ abzubilden derart, daß z_1', z_2', z_3' in drei vorgegebene Punkte Z_1, Z_2, Z_3 auf $\mathfrak{l}$ übergehen. Durch ein Produkt von nicht mehr als vier Perspektivitäten kann daher die Gerade $\mathfrak{l}$ so auf sich selbst abgebildet werden, daß die drei Punkte z_j in drei vorgegebene Punkte Z_j übergeführt werden. Die Anzahl der Perspektivitäten, aus denen man eine beliebige vorgegebene Projektivität zusammensetzen kann, ist in Wirklichkeit nicht größer als drei.

Andererseits gibt es eine und nur eine Möbius-Transformation, welche die drei z_j auf die z_j' bzw. die Z_j abbildet. Nach dem Vorangehenden stellt diese Transformation die Projektivität von $\mathfrak{l}$ auf $\mathfrak{l}'$ bzw. auf sich selbst dar, bei der jene Punktetripel auf einander bezogen werden. Soweit es sich um eine Abbildung von $\mathfrak{l}$ auf sich selbst handelt, ist dies der Fundamentalsatz der reellen ein-dimensionalen projektiven Geometrie.

Umgekehrt stellt jede Möbiussche Transformation

$$z' = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta \neq 0)$$

eine Projektivität zwischen (verschiedenen oder zusammenfallenden) Geraden $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}'$ dar. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Gerade $\mathfrak{l}$ ist offenbar die, daß sie durch den Pol z_∞ der Transformation f hindurchgeht.

Wenn $f(z)$ ganz ist $(\gamma = 0)$, so liegt der Pol von f im Unendlichen, die Wahl von $\mathfrak{l}$ ist somit ganz unbestimmt und die durch f dargestellte Perspektivität ist eine Parallelprojektion.

Ist hingegen $\gamma \neq 0$, so sind die Fixpunkte z_0, z_0^* und die Pole z_∞, z_∞' endlich. Da die Fixpunkte Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\gamma z^2 - (\alpha - \delta) z - \beta = 0 \tag{5}$$

sind, so gilt

$$z_0 + z_0^* = \frac{\alpha - \delta}{\gamma} = z_\infty' + z_\infty ,$$

woraus folgt, daß die vier Punkte Ecken eines Parallelogramms sind; dies ist das oben eingeführte charakteristische Parallelogramm von f.

Angenommen f sei nicht involutorisch, also $\alpha + \delta \neq 0$, d. h. $z'_\infty \neq z_\infty$. Dann wird das Parallelogramm in eine Strecke ausarten, wenn einer der Fixpunkte in die Gerade durch z_∞ und z'_∞ fällt, d. h. wenn ein reelles λ existiert derart, daß der Punkt

$$z = z_\infty + (z'_\infty - z_\infty)\,\lambda = -\frac{\delta}{\gamma} + \frac{\alpha+\delta}{\gamma}\,\lambda$$

die Fixpunktgleichung (5) erfüllt. Dies ist der Fall dann und nur dann, wenn die Klasseninvariante

$$q = \frac{(\alpha+\delta)^2}{\Delta}$$

reell ist und nicht zwischen 0 und 4 liegt; d. h. f ist hyperbolisch oder parabolisch.

Auch im Falle einer Involution f ist das charakteristische Parallelogramm ausgeartet, da dann $z'_\infty = z_\infty$ in der Mitte zwischen den Fixpunkten liegt.

Ein eigentliches charakteristisches Parallelogramm hat die Transformation f mithin dann und nur dann, wenn sie elliptisch oder loxodromisch ist. Sie stellt dann auf wenigstens zwei Weisen eine Perspektivität dar. Geht nämlich $\mathfrak{l}$ durch z_∞ und einen der Fixpunkte, so ist $\mathfrak{l}'$ die Gerade durch z'_∞ und denselben Fixpunkt. Da dieser auch Fixpunkt der durch f dargestellten Projektivität ist, ist diese eine Perspektivität. Ihr Zentrum ist der andere Fixpunkt (vgl. § 1).

Im Falle eines nicht-loxodromischen f erkennt man, daß die Gerade $\mathfrak{g}$ durch die Pole z_∞ und z'_∞ invariant ist. In der Tat liegen die Punkte $f(z_\infty) = \infty$ und $f(\infty) = z'_\infty$ auf $\mathfrak{g}$, während der dritte Punkt

$$f(z'_\infty) = f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \frac{\alpha^2 + \beta\gamma}{\gamma(\alpha+\delta)}$$

dann und nur dann auf $\mathfrak{g}$ liegt, wenn die Klasseninvariante q reell ausfällt.

Das charakteristische Parallelogramm einer elliptischen, nicht-involutorischen Möbius-Transformation ist ein Rhombus. Diese stellt außer der Perspektivität $\mathfrak{l} \to \mathfrak{l}'$ noch eine elliptische, d. h. Fixpunkt-freie Projektivität der Polgeraden $\mathfrak{g}$ auf sich selbst dar. Dies ist (bekanntlich) der einzige Fall, in dem drei Perspektivitäten zur Erzeugung der Projektivität erforderlich sind. In allen anderen (nicht-perspektiven) Fällen genügen zwei.

Wählt man als Polgerade $\mathfrak{g}$ die reelle Achse, so werden die $\mathfrak{g}$ invariant lassenden Projektivitäten gegeben durch die reellen Möbius-Transformationen.

Nun sei $\mathfrak{l}_1$ irgendeine Gerade durch $z_\infty = -\dfrac{\delta}{\gamma}$, etwa

$$a z + \bar{a}\bar{z} + a\frac{\delta}{\gamma} + \bar{a}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\gamma}} = 0.$$

Ihr durch die Transformation f vermitteltes Bild $\mathfrak{l}'_1$ muß durch den Punkt $z'_\infty = \dfrac{\alpha}{\gamma}$ gehen. Eine einfache Rechnung ergibt für $\mathfrak{l}'_1$ die Gleichung

$$b z + \bar{b}\bar{z} + b_1 = 0,$$

worin

(6) $$b = -\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\bar{\Delta}\bar{a}, \quad b_1 = \frac{\bar{\alpha}}{\gamma}\Delta a + \frac{\alpha}{\bar{\gamma}}\bar{\Delta}\bar{a}$$

zu setzen ist. Hiermit kann man den folgenden *Satz* beweisen:

Die beiden Geraden $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_1'$ schneiden sich auf der Fixpunkt-Diagonale des charakteristischen Parallelogramms der Transformation f dann und nur dann, wenn f elliptisch ist.

Zum Beweis nehme man $z_\infty = -1, z'_\infty = 1$ an; dann ist $\alpha = \gamma = \delta = 1$, $\Delta = 1 - \beta$ und die Fixpunkte z_0, z_0^* genügen der Gleichung $\xi^2 = \beta$. Nach (6) gilt dann

$$b = (\bar{\beta} - 1)\bar{a}, \quad b_1 = a + \bar{a} - (\beta a + \bar{\beta}\bar{a})$$

und der gemeinsame Punkt von $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_1'$ ist gegeben durch

$$z_1 = -\frac{a\bar{b} + \bar{a}b + 2\bar{a}\bar{b}}{a\bar{b} - \bar{a}b}$$
$$= \frac{(a+\bar{a})^2 - \beta a^2 - \bar{\beta}\bar{a}^2 - 2\beta a\bar{a}}{\beta a^2 - \bar{\beta}\bar{a}^2 - (a^2 - \bar{a}^2)}.$$

Er liegt auf der Diagonale durch die Fixpunkte (welche unter den angegebenen Voraussetzungen durch 0 geht) dann und nur dann, wenn das Verhältnis $\frac{z_1}{z_0}$ reell ist; dies ist nun

$$= \frac{(a+\bar{a})^2 - (z_0 a + \bar{z}_0 \bar{a})^2 - z_0 a \bar{a}(z_0 - \bar{z}_0)}{z_0(a^2 z_0^2 - \bar{a}^2 \bar{z}_0^2 - (a^2 - \bar{a}^2))},$$

also ein Ausdruck von der Form $\frac{R_1}{i R_2 z_0} - \frac{i R_3}{i R_2}$, wo die R_k reell sind, und demnach reell dann und nur dann, wenn z_0 rein imaginär ist, das charakteristische Parallelogramm also ein Rhombus.

Damit ist der Satz allgemein bewiesen; denn der im Satz festgestellte Sachverhalt (oder das Gegenteil) bleibt bestehen, wenn man zu einer Möbius-Transformation mit einem ähnlichen Parallelogramm übergeht.

Aus dem Beweis folgt ferner, daß im Falle einer nicht-involutorischen Möbius-Transformation mit ausgeartetem charakteristischen Parallelogramm der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_1'$ auf der Mittellinie zwischen z_∞, z'_∞ liegt. Alle Transformationen $\tilde{f}$, die in der Form $g^{-1} f g$ darstellbar sind, wo

$$z = g(z) = e^{i\vartheta} z + t$$

eine beliebige Bewegung in der Ebene darstellt, haben dieselbe Eigenschaft.

In anderen Fällen ist eine geometrische Deutung der Formel (6) komplizierter. Davon soll in einer späteren Note die Rede sein.