Über eine spezielle Klasse Frobeniusscher Gruppen

Herrn REINHOLD BAER zum 60sten Geburtstag gewidmet

Von

HANS SCHWERDTFEGER

Bei der Betrachtung eines einzelnen Elementes A einer Transformationsgruppe, im Falle einer Gruppe linearer Transformationen dargestellt durch eine Matrix, erweist es sich oft als vorteilhaft, dies Element durch eine Ähnlichkeitstransformation TAT^{-1} innerhalb der Gruppe selbst auf seine Normalform zu bringen. Dabei können irgendwelche Elemente T der Gruppe verwendet werden. Es erhebt sich die Frage nach denjenigen Gruppen, in denen die Reduktion auf Normalform sich dadurch vereinfachen läßt, daß man das transformierende Element T nur in einer bestimmten Untergruppe zu suchen braucht, unabhängig von der Wahl von A. Gruppen dieser Art lassen sich unabhängig von ihrer Darstellung durch Transformationen charakterisieren.

Definition. *Eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ soll eine* T_1*-Gruppe heißen, wenn es in $\mathfrak{G}$ eine echte Untergruppe $\mathfrak{H}$ gibt derart, daß jedes nicht in $\mathfrak{H}$ enthaltene Element $A \in \mathfrak{G}$ auf eine und nur eine Weise durch Transformation mit einem Element $H \in \mathfrak{H}$ in ein vorgegebenes, zu A konjugiertes Element TAT^{-1} ($T \in \mathfrak{G}$) übergeführt werden kann. Das heißt, zu vorgegebenem $A \notin \mathfrak{H}$ und $T \in \mathfrak{G}$ gibt es genau ein $H \in \mathfrak{H}$, mit dem*

$$HAH^{-1} = TAT^{-1} \tag{0}$$

wird. Es soll dann auch gesagt werden, daß $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft T_1 *in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{H}$ hat*[1]).

Es stellt sich heraus, daß jede T_1-Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Frobenius-Gruppe mit $\mathfrak{H}$ als regulärem Normalteiler ist, welcher sich als Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ erweist und damit eindeutig bestimmt ist. Ferner ist $\mathfrak{G}$ halb-direktes Produkt $\mathfrak{H}\mathfrak{N}$, wo $\mathfrak{N}$ eine abelsche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, die mit einer gewissen Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{H}$ isomorph ist. Daher ist $\mathfrak{G}$ Untergruppe des Holomorphs von $\mathfrak{H}$. Aus diesem Umstand läßt sich eine explizite Form des Multiplikationsgesetzes in $\mathfrak{G}$ herleiten. Im Falle einer zyklischen, sowie einer elementaren abelschen Gruppe $\mathfrak{H}$ lassen sich alle T_1-Gruppen angeben[2]).

---

[1]) Bezüglich Gruppen mit der ähnlich definierten Eigenschaft T_2 vgl. [6].

[2]) Unterhaltungen mit Herrn BAER, sowie mit Herrn A. BRANDIS in Göttingen waren mir bei der Behandlung des Gegenstandes dieser Arbeit von Nutzen.

1. Als T_1-Gruppe erweist sich mühelos die eindimensionale affine Gruppe über einem beliebigen Körper, d. i. die Gruppe der Transformationen $x \to ax + \alpha$ $(a \neq 0)$, wo a und α Körperelemente sind. Eine solche Transformation werde durch $A = (a, \alpha)$ bezeichnet. Die Untergruppe $\mathfrak{H}$ ist in diesem Fall der aus den Elementen $H = (1, \eta)$ bestehende Normalteiler. An dieser Gruppe lassen sich die folgenden allgemeinen Feststellungen leicht bestätigen.

Für das Weitere sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe, welche die Eigenschaft T_1 in bezug auf eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ hat. Diese Eigenschaft ist invariant gegen Isomorphismus. Da ferner, wenn $A \notin \mathfrak{H}$, auch $TAT^{-1} = HAH^{-1} \notin \mathfrak{H}$ gilt, so folgt, daß $\mathfrak{G} - \mathfrak{H}$ eine Vereinigung vollständiger Klassen konjugierter Elemente ist. Da somit dasselbe für $\mathfrak{H}$ gilt, ist $\mathfrak{H}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$.

Der Normalisator $\mathfrak{N}_A$ von A besteht aus allen Elementen $N \in \mathfrak{G}$, für die $NAN^{-1} = A$. Gemäß (0) kann man N durch ein eindeutig bestimmtes Element von $\mathfrak{H}$ ersetzen, nämlich das Einheitselement I. Daher ist

(1) $$N_A \cap \mathfrak{H} = I.$$

Auch mit jeder der Restklassen $B\mathfrak{N}_A$ hat $\mathfrak{H}$ genau ein Element H gemeinsam. Die Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden also ein vollständiges Repräsentantensystem (mod $\mathfrak{N}_A$) und es gilt

(2) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_A = \mathfrak{N}_A\mathfrak{H}$$

und

(3) $$\mathfrak{G}/\mathfrak{H} \cong \mathfrak{N}_A.$$

Für beliebige $B \in \mathfrak{G}$ und $A \notin \mathfrak{H}$ bilde man nun den Kommutator $C = BAB^{-1}A^{-1}$. Mit eindeutig bestimmten $H \in \mathfrak{H}$ ist dann

$$C = H(AH^{-1}A^{-1}).$$

Als Produkt zweier Elemente aus $\mathfrak{H}$ ist C auch ein Element von $\mathfrak{H}$ und wegen $CA = HAH^{-1}$ ist jedes der Konjugierten von A ein Element einer und derselben Restklasse (mod $\mathfrak{H}$) in $\mathfrak{G}$, d. h. $\mathfrak{C}_A \subseteq \mathfrak{H}A$, wenn man mit $\mathfrak{C}_A$ die Klasse der Konjugierten von A bezeichnet. Da nun auf Grund der Eigenschaft T_1 alle HAH^{-1} untereinander verschieden sind, so ergibt sich im Hinblick auf die endliche Ordnung von $\mathfrak{H}$ sogar

(4) $$\mathfrak{C}_A = \mathfrak{H}A.$$

(Im Falle des Beispiels der eindimensionalen affinen Gruppe besteht die Gleichheit (4) auch dann, wenn der zugrunde liegende Körper und damit die Gruppe, sowie die Untergruppe $\mathfrak{H}$ unendlich sind.)

Aus dem Vorangehenden folgt nicht nur, daß alle Kommutatoren aus Elementen einer T_1-Gruppe $\mathfrak{G}$ in dem Normalteiler $\mathfrak{H}$ enthalten sind; im Falle endlicher Ordnung, oder allgemeiner, wenn die Gleichung (4) besteht, kann man auch sagen, daß alle Elemente von $\mathfrak{H}$ Kommutatoren sind, ja sogar solche der Form $C = HAH^{-1}A^{-1}$ $(H \in \mathfrak{H})$, mit festem $A \notin \mathfrak{H}$. So ergibt sich

Satz 1. *Die Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, in bezug auf die die Gruppe $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft T_1 hat, ist die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ und als solche eindeutig bestimmt. Die Faktor-*

gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ *ist daher abelsch. Gleiches gilt (wegen* (3)*) für die Normalisatoren* $\mathfrak{N}_A$. *Alle Elemente von* $\mathfrak{H}$ *sind Kommutatoren der Form* $HAH^{-1}A^{-1}$, $A \notin \mathfrak{H}$.

Ferner kann man leicht beweisen:

Satz 2. *Außer dem Einheitselement I gibt es in* $\mathfrak{H}$ *kein Element, welches mit irgend einem Element* $A \notin \mathfrak{H}$ *vertauschbar ist, und diese Eigenschaft, zusammen mit* (4), *genügt, um eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *als* T_1-*Gruppe zu charakterisieren.*

Aus diesem Satz, zusammen mit der Relation (1) folgt nun

Satz 3. *Jede* T_1-*Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist eine Frobeniusgruppe mit dem Kern* $\mathfrak{H}$.

Dies bedeutet, daß die Untergruppe $\mathfrak{N}_A$ der Ordnung $|\mathfrak{N}_A| = n$ und dem Index $(\mathfrak{G}|\mathfrak{N}_A) = h = |\mathfrak{H}|$ mit ihrem eigenen Normalisator zusammenfällt und mit jeder ihrer Konjugierten nur das Einheitselement gemeinsam hat.

Nach (0) ist nämlich

$$T\mathfrak{N}_A T^{-1} = \mathfrak{N}_{TAT^{-1}} = \mathfrak{N}_{HAH^{-1}} = H\mathfrak{N}_A H^{-1}$$

mit durch T eindeutig bestimmten $H \in \mathfrak{H}$; wenn nun H alle Elemente von $\mathfrak{H}$ durchläuft, so sind $H\mathfrak{N}_A H^{-1}$ die sämtlichen h untereinander verschiedenen konjugierten Untergruppen von $\mathfrak{N}_A$. Ist also $T\mathfrak{N}_A T^{-1} = \mathfrak{N}_A$, so ist das gemäß (0) dem Element T entsprechende Element $H \in \mathfrak{H}$ das Einheitselement, und daher $TAT^{-1} = A$, was $T \in \mathfrak{N}_A$ bedeutet. Es ist also $\mathfrak{N}_{\mathfrak{N}_A} = \mathfrak{N}_A$.

Ferner, wenn etwa $\mathfrak{N}_A$ und $H\mathfrak{N}_A H^{-1}$ ein Element $N \neq I$ gemeinsam haben, so bedeutet dies, daß $H^{-1}NH \in \mathfrak{N}_A$, also auch $N^{-1}H^{-1}NH \in \mathfrak{N}_A$; da aber jeder Kommutator in $\mathfrak{H}$ liegt, so folgt nach (1) $HN = NH$, was nach Satz 3 $H = I$ zur Folge hat.

Gleichbedeutend mit Satz 3 ist bekanntlich die Tatsache, daß die Gruppe $\mathfrak{N}_A$ eine isomorphe transitive Darstellung $\widetilde{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ durch Permutationen der Gestalt

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} H\mathfrak{N}_A \\ XH\mathfrak{N}_A \end{pmatrix} \tag{5}$$

induziert, worin die bekannte zweite Definition der Frobeniusgruppe zum Ausdruck kommt.

Genauer kann man dazu noch sagen, daß die durch (5) gegebene Darstellung von $\mathfrak{H}$ die reguläre Darstellung von $\mathfrak{H}$ ist; daher heißt $\mathfrak{H}$ auch der reguläre Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$. Die den $h - 1$ von I verschiedenen Elementen von $\mathfrak{H}$ zugeordneten Permutationen (5) lassen keines der Permutationssymbole, d. s. hier die Restklassen $H\mathfrak{N}_A$, fest. Die übrigen Elemente von $\mathfrak{G}$ verteilen sich auf die h Untergruppen $H\mathfrak{N}_A H^{-1}$, und die einem solchen Element zugeordnete Permutation läßt nur die Restklasse $H\mathfrak{N}_A$ (bzw.) fest. Das Bild $\widetilde{\mathfrak{N}}_A$ von $\mathfrak{N}_A$ in der Darstellung $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ist also eine der Stabilitätsuntergruppen von $\widetilde{\mathfrak{G}}$; es ist eine Permutationsgruppe der Ordnung n vom Grade $h - 1$. Da $\mathfrak{N}_A$ abelsch ist, so muß, *falls* $\widetilde{\mathfrak{N}}_A$ *transitiv ist*, die Ordnung mit dem Grad übereinstimmen: $n = h - 1$. Im allgemeinen ist bekanntlich n ein Teiler von $h - 1$ (vgl. [1], § 134).

2. Die weitere Betrachtung schließt sich an die Darstellung (2) der T_1-Gruppe $\mathfrak{G}$ als halb-direktes Produkt $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_A$ an (vgl. [3], p. 88). Es soll gezeigt werden, wie man hieraus im Falle einer abelschen Gruppe $\mathfrak{H}$ ein universelles Multiplikationsgesetz in $\mathfrak{G}$ herleiten kann.

Offenbar kann man $\mathfrak{G}$ als Resultat einer normalen Erweiterung einer zu $\mathfrak{H}$ isomorphen Gruppe Γ mit einer zu $\mathfrak{N}_A$, d. h. zu der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ isomorphen Gruppe G darstellen. Die zunächst nicht notwendig abelsche Gruppe Γ werde additiv geschrieben; ihre Elemente seien $o, \alpha, -\alpha, \beta, \varkappa, \eta, \ldots$. Die multiplikative abelsche Gruppe G habe die Elemente $1, a, a^{-1}, b, \ldots$. Die Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ erscheinen dann als Paar-Symbole $A = (a, \alpha)$, $B = (b, \beta), \ldots$. Die zu Γ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{H}$ besteht nun aus den Elementen $H = (1, \eta)$, und die Multiplikation in $\mathfrak{H}$ ist durch $H_1 H_2 = (1, \eta_1)(1, \eta_2) = (1, \eta_1 + \eta_2)$, das Inverse durch $(1, \eta)^{-1} = (1, -\eta)$ gegeben. Beachtet man, daß $\mathfrak{H}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$ ist, also $AHA^{-1} \in \mathfrak{H}$ für alle $A \in \mathfrak{G}$, so folgt

$$AHA^{-1} = (1, \varphi_A(\eta)). \tag{6}$$

Die hierdurch in Γ definierte Funktion $\varphi_A(\eta)$ stellt einen Automorphismus in Γ dar, welcher für $A \notin \mathfrak{H}$ nach Satz 2 kein anderes als das Einheitselement o festläßt. Für $A = K = (1, \varkappa) \in \mathfrak{H}$ ist $\varphi_K(\eta) = \varkappa + \eta - \varkappa$ ein innerer Automorphismus von Γ.

Die Automorphismen φ_A bilden eine zu $\mathfrak{G}$ homomorphe Gruppe Φ. Sei $\mathfrak{K}$ der Kern dieses Homomorphismus; für jedes $K \in \mathfrak{K}$ ist $KHK^{-1} = H$ für alle $H \in \mathfrak{H}$. Mithin liegt $\mathfrak{K}$ im Zentrum von $\mathfrak{H}$ und ist daher abelsch. Überdies ist

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{K} \cong \Phi \tag{7}$$

und da $\mathfrak{K}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$ ist, so gilt auch

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{K}} \Big/ \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{H}.$$

Ist ferner Ψ die Gruppe der in Φ enthaltenen inneren Automorphismen von Γ, so ist $\mathfrak{H}/\mathfrak{K} \cong \Phi$ und nach (7) und (3)

$$\Phi/\Psi \cong \mathrm{G}, \tag{8}$$

d. h. G ist die sogenannte Gruppe der äußeren Automorphismen von Γ in Φ.

Könnte man nun zeigen, daß die Gruppe Φ abelsch ist, so würde, da $\mathfrak{H}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ ist, $\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{K}$ folgen. Mithin wäre $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}$ wäre abelsch. Im allgemeinen ist dies nicht der Fall (vgl. Abschnitt 3); doch soll es für das Folgende vorausgesetzt werden, so daß nunmehr Γ abelsch ist.

Sei $C = (1, \gamma) \in \mathfrak{H}$. Dann ist mit Rücksicht auf (6)

$$(CA)H(CA)^{-1} = (1, \gamma)(1, \varphi_A(\eta))(1, -\gamma) = (1, \varphi_A(\eta)) = AHA^{-1},$$

d. h. $\varphi_A(\eta) = \varphi_{CA}(\eta)$ und diese Transformation hängt nur ab von der Restklasse (mod $\mathfrak{H}$), in der A sich befindet, welche allein durch die erste Komponente a von

$A = (a, \alpha)$ bestimmt ist. Darum kann man nun

$$\varphi_A(\eta) = a\eta$$

schreiben und die Gruppe G als Operatorengruppe von Γ auffassen:

$$a(b\eta) = (ab)\eta, \quad a(\eta_1 + \eta_2) = a\eta_1 + a\eta_2,$$

wonach G eine echte oder unechte Untergruppe der Automorphismengruppe von Γ ist. Setzt man ferner definitionsgemäß

$$(1 - a)\eta = \eta - a\eta,$$

so erweist sich auch der Operator $1 - a$ als ein Automorphismus der Gruppe Γ.

Um das Kompositionsgesetz in der durch Erweiterung mit G aus Γ erzeugten Gruppe $\mathfrak{G}$ zu ermitteln, braucht man $\mathfrak{G}$ nur noch als Untergruppe des Holomorphs von Γ zu betrachten, also als das halb-direkte Produkt (G, Γ). Das Holomorph werde als Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_h$ über den h Elementen von Γ aufgefaßt. Es ist der Normalisator der regulären Darstellung $\widetilde{\Gamma}$ von Γ, deren Elemente die Permutationen $\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta + \alpha \end{pmatrix}$ sind. Den Elementen a von G entsprechen die Permutationen $\tilde{a} = \begin{pmatrix} \eta \\ a\eta \end{pmatrix}$. Alsdann ist dem Element $A = (a, \alpha)$ die Permutation $\tilde{\alpha}\tilde{a} = \begin{pmatrix} \eta \\ a\eta + \alpha \end{pmatrix}$ zugeordnet. Entspricht ebenso dem Element $B = (b, \beta)$ die Permutation $\tilde{\beta}\tilde{b}$, so ist, wie leicht zu sehen ist, dem Produkt BA die Permutation $\begin{pmatrix} \eta \\ ba\eta + b\alpha + \beta \end{pmatrix}$ zugeordnet. Es ist demnach

$$BA = (ba, b\alpha + \beta).$$

Dies ist das universelle Kompositionsgesetz in einem halb-direkten Produkt. Im Falle der eindimensionalen affinen Gruppe über einem Körper läßt es sich leicht bestätigen; dabei ist Γ die additive, G die multiplikative Gruppe der Körperelemente.

3. Als Beispiel werde nun für Γ die zyklische Gruppe der Ordnung h gewählt, dargestellt durch die Restklassen $(\mathrm{mod}\, h)$, mit gewöhnlicher Addition $(\mathrm{mod}\, h)$ als Kompositionsgesetz. Die Automorphismengruppe dieser Gruppe Γ_h ist die multiplikative Gruppe $\mathbf{R}_h$ der zu h teilerfremden Restklassen $(\mathrm{mod}\, h)$, dargestellt durch die $\varphi(h)$ zu h teilerfremden Reste $(\mathrm{mod}\, h)$. Die Gruppe G ist eine Untergruppe von $\mathbf{R}_h$. Da für jedes $a \in \mathrm{G}$, $a \neq 1$, die Gleichung

$$(1 - a)\eta = \beta \qquad (\beta = 0, 1, 2, \ldots, h - 1)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $\eta \in \Gamma$ haben muß, so sieht man, daß nur solche Elemente $a \in \mathbf{R}_h$ als von 1 verschiedene Elemente von G in Frage kommen, für die nicht nur a, sondern auch $1 - a$ zu h teilerfremd ist. Für *alle* Elemente von $\mathbf{R}_h$ ist dies dann und nur dann der Fall, wenn $h = p$ eine ungerade Primzahl ist. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann die eindimensionale affine Gruppe über dem Restklassenkörper $\mathbf{R}_p$ (vgl. Abschnitt 1). Es ist klar, daß h auf keinen Fall eine gerade Zahl sein kann.

Sei nun $h = p^m$, wo p eine ungerade Primzahl und $m \geqq 1$ ist. Die Ordnung von G muß dann, wie oben festgestellt wurde, ein Teiler von $p^m - 1$ sein. Die multiplikative Restklassengruppe R_{p^m} ist hier zyklisch und ihre Ordnung ist $p^{m-1}(p-1)$; als $\mathbf{G}$ kommt also nur die (natürlich zyklische) Untergruppe der Ordnung $p - 1$ in $\mathbf{R}_{p^m}$ oder eine ihrer Untergruppen in Frage.

Im Falle, daß h mehrere ungerade Primfaktoren $p, q, \ldots$ besitzt, ist die Automorphismengruppe von Γ_h direktes Produkt der entsprechenden Sylow-Untergruppen $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \ldots$; wenn man deren Bildung in Betracht zieht (vgl. [7], pg. 74), so erkennt man, daß die Elemente der Untergruppe der Ordnung $(p-1)\,(q-1)\cdots$ solche a sind, für die $a - 1$ nicht der Gruppe $\mathbf{R}_h$ angehört. Es gibt daher keine Gruppe $\mathbf{G}$, mit welcher Γ_h erweitert eine T_1-Gruppe ergibt.

Auch wenn Γ die elementare Gruppe vom Typus $(p, p, \ldots, p)$ ist, also das direkte Produkt von m zyklischen Gruppen der Primzahlordnung p, kann eine Gruppe $\mathbf{G}$ angegeben werden, nämlich die zyklische Gruppe der Ordnung $p^m - 1$ oder eine ihrer Untergruppen.

4. Für eine von der hier betrachteten verschiedene Klasse von Frobeniusschen Gruppen hat GORENSTEIN [2] gezeigt, daß die reguläre Untergruppe $\mathfrak{H}$ abelsch ist. Es lag daher nahe zu untersuchen, ob dies auch im Falle der T_1-Gruppen zutrifft. Dies ist jedoch nicht der Fall; denn das von O. J. SCHMIDT [5] angegebene Beispiel einer Frobeniusschen Gruppe mit nicht-abelschem regulärem Normalteiler $\mathfrak{H}$ der Ordnung 7^3 erweist sich als eine T_1-Gruppe. Dieselbe Gruppe wurde übrigens unabhängig von B. H. NEUMANN [4] nicht durch die Schmidtschen definierenden Relationen

$$RQ = QRP\,, \quad Q^7 = R^7 = P^7 = I\,, \quad PQ = QP\,, \quad RP = PR\,,$$

sondern als Gruppe der Tripel von Restklassen (mod 7) mit der Multiplikationsvorschrift

$$(a, b, c)\,(a', b', c') = (a + a', b + b', c + c' + a' b)$$

gegeben. Der Isomorphismus beider Gruppen wird evident, wenn man $R = (0, 1, 1)$, $Q = (1, 0, 1)$ setzt, woraus $P = (0, 0, 1)$ folgt. SCHMIDT erweitert die Gruppe in eine T_1-Gruppe der Ordnung $7^3 \cdot 3$ durch Adjunktion eines Elementes T der Ordnung 3, für das

$$T^{-1}PT = P^4\,, \quad T^{-1}QT = Q^2P\,, \quad T^{-1}RT = R^2$$

gilt. NEUMANN's Automorphismus der Ordnung 3 ist durch

$$(a, b, c) \to (2a, 2b, 4c)$$

oder

$$P \to P^4\,, \quad Q \to Q^2P^2\,, \quad R \to R^2P^2$$

definiert.

[3]) In den „Ausgewählten Werken" ist die erste Gleichung in der letzten Zeile auf S. 270 durch $PT = TP^4$ zu ersetzen.

Literaturverzeichnis

[1] W. BURNSIDE, Theory of Groups of Finite Order. 2nd ed. Cambridge 1916, reprinted New York 1955.
[2] D. GORENSTEIN, A class of Frobenius groups. Canadian J. Math. **11**, 39–47 (1959).
[3] M. HALL, Jr., The Theory of Groups. New York 1959.
[4] B. H. NEUMANN, Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed. Arch. Math. **7**, 1–5 (1956).
[5] O. J. SCHMIDT, Über die Frobenius-Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR **26**, 3–5 (1940); oder Izbrannie Trudi, Moskau 1959, p. 270–272 (Russisch)[3].
[6] H. SCHWERDTFEGER, On a property of the Moebius group. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **54** 23–32 (1961).
[7] N. TSCHEBOTARÖW, Grundzüge der Galoisschen Theorie (Deutsch von H. Schwerdtfeger). Groningen 1950.

Eingegangen am 19. 2. 1962

Anschrift des Autors:
Hans Schwerdtfeger
Department of Mathematics
McGill University
Montreal, Canada