Math. Z. 128, 85–92 (1972)

Über die Faltung schlichter Funktionen

Stephan Ruscheweyh

I. Einführung

Mit S, C, S^*, K seien die Familien der im Einheitskreis $EK := \{z \mid |z|<1\}$ holomorphen und in der üblichen Weise normierten, schlichten, fast-konvexen[1], sternförmigen bzw. konvexen Funktionen bezeichnet. Bekanntlich ist $S \supset C \supset S^* \supset K$. Wenn

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

in EK holomorph sind, so sei

$$h(z)=(f*g)(z):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$$

das Hadamardprodukt von f und g.

Pólya und Schönberg [5] stellten die folgende Vermutung auf:

$$f\in K,\ g\in K \Rightarrow f*g\in K, \tag{1}$$

$$f\in S^*,\ g\in K \Rightarrow f*g\in S^*. \tag{2}$$

Die Vermutungen (1) und (2) sind offenbar äquivalent. Ein Beweis konnte bisher nicht gefunden werden, lediglich einige Teilmengen von K und S^*, für die (1) und (2) richtig sind, wurden konstruiert (s. z.B. Mairhuber *et al.* [4], Ruscheweyh [8]). Suffridge [13] konnte jedoch eine schwächere Aussage beweisen:

Lemma 1.

$$f\in K,\ g\in K \Rightarrow f*g\in C. \tag{3}$$

Die Vermutung von Pólya und Schoenberg legt die Betrachtung der Funktionenfamilie

$$M := \{f\in S \mid f*g\in S \text{ für alle } g\in K\} \tag{4}$$

nahe. Während nach Lemma 1 $K\subset M$ gilt, würde (2) $S^*\subset M$ bedeuten. Man kann leicht sehen (Satz 1), daß in M die Bieberbachsche Vermutung richtig ist, jedoch ist $M \neq S$ wie ein – aus anderem Anlaß konstruiertes – Beispiel von Epstein und Schoenberg [1] zeigt.

[1] Im englischen Sprachgebrauch: close-to-convex.

Das wichtigste Ergebnis dieser Arbeit ist der

Satz 4. *Sei $f\in S$. Es gebe ein $\alpha\in\mathbb{R}$ und Zahlen $\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ mit $|\beta|\leqq 1$, $|\gamma|\leqq 1$, so daß in EK*

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha}(1-\beta z)(1-\gamma z) f'(z)>0 \tag{5}$$

gilt. Dann ist $f*g\in C$ für jedes $g\in K$. Insbesondere ist $f\in M$.

Dieser Satz umfaßt, neben der Aussage von Lemma 1, auch bekannte Ergebnisse von Rahmanov [6] und Sheil-Small [11]. Der Beweis basiert auf einer Dreipunkteformel für die Funktionen aus K (Satz 3), die eine große Anzahl bekannter Abschätzungen für diese Funktionen als Spezialfall enthält.

Herrn Dr. K.J. Wirths bin ich für wertvolle Diskussionen zu Dank verpflichtet.
Unterstützung bei der Abfassung dieser Arbeit wurde vom Sonderforschungsbereich 40 (Theoretische Mathematik) gewährt.

II. Eigenschaften der Familie M

Wir beweisen zunächst, daß in M die Bieberbachsche Vermutung richtig ist.

Satz 1. *Sei $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\in M$. Dann ist $|a_k|\leqq k$, $k\in\mathbb{N}$.*

Beweis. Man verifiziert leicht die Gültigkeit der folgenden Aussagen

$$z+\sigma z^k\in K \Leftrightarrow |\sigma|\leqq k^{-2}, \tag{6}$$

$$z+\sigma z^k\in S \Leftrightarrow |\sigma|\leqq k^{-1}, \tag{7}$$

für $k=2,3,\ldots$. Wegen (4) und (6) ist

$$f*\left(z+\frac{z^k}{k^2}\right)=z+\frac{a_k}{k^2} z^k\in S,$$

und mit (7) folgt die Behauptung.

Sehr wichtig für viele Untersuchungen ist die im nächsten Satz ausgesprochende Charakterisierung der Familie M.

Satz 2. *Sei $f(z)$ in EK holomorph, $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Dann gilt*

$$f\in M \Leftrightarrow \frac{1}{z}(f*p)\neq 0 \qquad \textit{für alle } z\in EK \textit{ und alle } p\in S^*. \tag{8}$$

Zum Beweis benötigen wir ein Ergebnis von Suffridge [13]:

Lemma 2. *Sei $g\in K$, $|\sigma|\leqq 1$, $\sigma\neq 1$. Dann ist $\dfrac{g(z)-g(\sigma z)}{1-\sigma}\in S^*$.*

Beweis (von Satz 2). 1) Seien $f \in M$ und $p \in S^*$. Dann ist

$$g(z) := \int_0^z \frac{p(x)}{x} \, dx \in K,$$

also $f * g \in S$. Hieraus folgt $(f * g)' = \frac{1}{z}(f * p) \neq 0$ in EK.

2) Seien $g \in K$, $h = f * g$. Seien z_1, z_2 beliebig in EK gewählt mit $|z_1| \leqq |z_2|$, $z_1 \neq z_2$, und sei $\sigma = z_1/z_2$. Nach Lemma 2 ist $p = \frac{g(z) - g(\sigma z)}{1 - \sigma} \in S^*$, und eine leichte Rechnung zeigt $\frac{1}{z}(f * p) = \frac{h(z) - h(\sigma z)}{(1-\sigma) z}$. Setzt man $z = z_2 \neq 0$, so folgt aus der Voraussetzung $h(z_2) - h(z_1) \neq 0$, also $h \in S$. Da $g_0(z) = \frac{z}{1-z} \in K$ und $f * g_0 = f$ ist, haben wir mit dem Obigen auch $f \in S$ bewiesen. Damit ist alles gezeigt.

Als nächstes geben wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß gewisse Funktionenfamilien in M liegen. Dazu bezeichnen wir für jedes feste $h \in K$:

$$A_h := \left\{ f \in S \,|\, \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha} \frac{f'(z)}{h'(z)} \right] > 0 \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R}, \; z \in EK \right\}. \tag{9}$$

Offenbar ist $A_h \subset C$ (siehe z.B. [3]), und es gilt:

Lemma 3. *$A_h \subset M$ ist gleichbedeutend mit*

$$\operatorname{Re} \frac{\frac{z h'}{1 - \alpha z} * g}{z h' * g} > \frac{1}{2} \quad \textit{für alle } |\alpha| \leqq 1, z \in EK, \textit{ und alle } g \in K. \tag{10}$$

Bemerkung 1. Da $\bigcup_{h \in K} A_h = C$ ist, beinhaltet die Richtigkeit von (10) für alle $h \in K$ die Relation $C \subset M$. Dafür sprechen auch verschiedene andere Ergebnisse in [9], die die Variabilitätsbereiche von $\frac{f(z)}{z}$ und $\frac{z f'(z)}{f(z)}$ in C und M vergleichen.

Beweis. Nach Satz 2 ist die Aussage $A_h \subset M$ gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{z}(f * p) \neq 0 \qquad \text{für alle } p \in S^*, \; f \in A_h. \tag{11}$$

Sei P die Familie der in EK holomorphen Funktionen $F(z)$, für die dort $\operatorname{Re} F(z) \geqq 0$ und $F(0) = 1$ gilt. Eine Funktion $f \in S$ ist genau dann in A_h, wenn sie eine Ableitung der Form

$$f'(z)=e^{-i\alpha}h'(z)[\cos\alpha\, F(z)+i\sin\alpha] \tag{12}$$

mit $F\in P$ und $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ besitzt. Sei nun $p\in S^*$, also $g(z)=\int_0^z \frac{p(x)}{x}\,dx\in K$. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}(f*p)&=\frac{1}{z}(zf'*g)\\ &=\frac{e^{-i\alpha}}{z}(zh'F*g)\cos\alpha+i\,\frac{e^{-i\alpha}}{z}(zh'*g)\sin\alpha,\end{aligned}$$

und (11) ist äquivalent mit

$$\frac{zh'F*g}{zh'*g}\neq -i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\qquad \text{für alle } \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ F\in P,\ g\in K. \tag{13}$$

Da die Funktion auf der linken Seite von (13) in $z=0$ den Wert 1 hat, folgt aus dem Satz über die Gebietstreue, daß (13) äquivalent zu

$$\operatorname{Re}\frac{zh'F*g}{zh'*g}>0 \qquad \text{für alle } F\in P,\ g\in K, \tag{14}$$

ist. Nach der Formel von Herglotz [2] stimmt P überein mit der Menge der Funktionen

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+z\,e^{-i\varphi}}{1-z\,e^{-i\varphi}}\,d\mu(\varphi),$$

wobei $\mu(\varphi)$ eine monoton wachsende Funktion mit $\mu(2\pi)-\mu(0)=2\pi$ ist. Setzt man für festes $g\in K$, $z\in EK$

$$k(\varphi)=\operatorname{Re}\frac{zh'\,\dfrac{1+z\,e^{-i\varphi}}{1-z\,e^{-i\varphi}}*g}{zh'*g},$$

so ist nach (14)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k(\varphi)\,d\mu(\varphi)>0 \qquad \text{für alle zulässigen } \mu(\varphi).$$

Das ist aber genau dann der Fall, wenn $k(\varphi)>0$ für alle $\varphi\in[0,2\pi]$ ist. Beachtet man nun noch

$$\frac{1}{2}k(\varphi)=\operatorname{Re}\frac{\dfrac{zh'}{1-\alpha z}*g}{zh'*g}-\frac{1}{2},\qquad \alpha=e^{-i\varphi},$$

so wird die Äquivalenz von (10) und (11) deutlich.

Bemerkung 2. Sei für festes $h \in K$: $A_h \subset M$. Wenn dann $h * g \in K$ für alle $g \in K$ ist (das ist z.B. der Fall, wenn Vermutung (1) richtig ist), so kann man aus (12) und (14) sofort ablesen:

$$f \in A_h,\ g \in K \Rightarrow f * g \in A_{h*g} \subset C. \tag{15}$$

III. Eine Ungleichung für Funktionen aus K

Wir wollen (11) für einen Spezialfall beweisen. Dazu benötigen wir die folgende Dreipunkteformel für die Funktionen aus K:

Satz 3. *Sei $g \in K$, $z_j \in EK$, $j = 1, 2, 3$. Dann gilt:*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z_1}{z_1 - z_3}\,\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\,\frac{g(z_2) - g(z_1)}{g(z_2) - g(z_3)}\right] \geqq \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{z_1 + z_3}{z_1 - z_3}. \tag{16}$$

Beweis. Nach Sheil-Small [10] ist für $h \in K$, $x, y \in EK$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{x}{h(x)}\,\frac{h(x) - h(y)}{x - y}\right] \geqq \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Sei nun g die im Satz genannte Funktion, von der wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen wollen, daß sie in $|z| \leqq 1$ holomorph ist. Sei

$$h(\eta) := \frac{g\left(\dfrac{\eta + z_1}{1 + \bar{z}_1 \eta}\right) - g(z_1)}{g'(z_1)(1 - |z_1|^2)},$$

also $h(\eta) \in K$, und $x = \dfrac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}$, $y = \dfrac{z_3 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_3}$. Dann folgt aus (17), angewandt auf $h(\eta)$:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1 - z_3 \bar{z}_1}{1 - |z_1|^2}\,\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}\,\frac{g(z_2) - g(z_3)}{g(z_2) - g(z_1)}\right] \geqq \frac{1}{2},$$

also

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{1 - z_3 \bar{z}_1}\,\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\,\frac{g(z_2) - g(z_1)}{g(z_2) - g(z_3)}\right] \geqq 0.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist diese Beziehung auch noch für $|z_1| \leqq 1$, $|z_3| \leqq 1$, $z_1 \neq z_3$ gültig. Für $|z_1| = 1$ folgt

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z_1}{z_1 - z_3}\,\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\,\frac{g(z_2) - g(z_1)}{g(z_2) - g(z_3)}\right] \geqq 0. \tag{18}$$

Wie man unmittelbar sieht, ist für festes $z_2 \in EK$ die Funktion

$$H(z_1, z_3) := \frac{z_1}{z_1 - z_3}\,\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\,\frac{g(z_2) - g(z_1)}{g(z_2) - g(z_3)} - \frac{1}{2}\,\frac{z_1 + z_3}{z_1 - z_3}$$

im Dizylinder $|z_1|\leqq 1$, $|z_3|\leqq 1$ holomorph. Auf dem Rand gilt jedoch

$$\operatorname{Re} H(z_1, z_3) \geqq -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{z_1+z_3}{z_1-z_3} = 0.$$

Aus dem Minimumprinzip für harmonische Funktionen folgt nun (16).

Bemerkung 3. Eine leichte Umrechnung zeigt, daß (16) äquivalent zu der Formel

$$\operatorname{Re} \frac{\dfrac{z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)} * g}{\dfrac{z}{(1-\beta z)(1-\gamma z)} * g} \geqq \frac{1}{2} \tag{19}$$

für $z \in EK$, $|\alpha|\leqq 1$, $|\beta|\leqq 1$, $|\gamma|\leqq 1$, $g \in K$ ist. (19) enthält eine Reihe bekannter Abschätzungen der Funktionen aus K. Für $\gamma=0$ entsteht wieder (17). Mit $\alpha=\beta=1$ wird (19) zu

$$\operatorname{Re} \frac{z g'(z)}{g(z)-g(\gamma z)} \geqq \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1+\gamma}{1-\gamma},$$

was ebenfalls von Sheil-Small [10] bewiesen wurde. Die Fälle $\alpha=\beta=1$, $\gamma=0$ und $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$ ergeben die bekannten Abschätzungen

$$\operatorname{Re} \frac{z g'(z)}{g(z)} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} \frac{g(z)}{z} \geqq \frac{1}{2},$$

die zuerst von Strohhäcker [12] bewiesen wurden. Setzt man schließlich $\alpha=\beta=\gamma=1$, so wird (19), unter Beachtung der Relationen

$$\frac{z}{(1-z)^2} * g = z g', \qquad \frac{z}{(1-z)^3} * g = z g' + \frac{1}{2} z^2 g'',$$

zu

$$\operatorname{Re}\left[z \frac{g''}{g'} + 1\right] \geqq 0,$$

woraus man erkennt, daß (19) notwendig und hinreichend für die Funktionen aus K ist.

IV. Der Satz 4 und seine Folgerungen

Der Beweis von Satz 4 (s. Einführung) ist nun sehr einfach: Setzt man

$$h(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\gamma} \log \dfrac{1-\gamma z}{1-\beta z} & \text{für } \beta \neq \gamma \\[2ex] \dfrac{z}{1-\beta z} & \text{für } \beta=\gamma, \end{cases}$$

so ist $h(z)\in K$ und $zh'(z)=\dfrac{z}{(1-\beta z)(1-\gamma z)}$, und aus (10), (19) folgt $A_h\subset M$. In diesem Falle ist aber sogar für alle $g\in K$:

$$h*g=\begin{cases}\displaystyle\int_0^z \frac{zh'*g}{z}\,dz=\int_0^z \frac{g(\beta z)-g(\gamma z)}{z(\beta-\gamma)}\,dz\in K & \text{für } \beta\neq\gamma,\\[2mm] \displaystyle\frac{g(\beta z)}{\beta}\in K \quad \text{für } \beta=\gamma, & \end{cases}$$

wegen Lemma 2. Deshalb kann man wie in (15) schließen, und der Beweis ist vollendet.

Die in Satz 4 genannte Funktionenfamilie umfaßt zwei bekannte Teilmengen von C, nämlich die Menge der Funktionen $f\in S$, für die $\operatorname{Re} e^{i\alpha}f'(z)\geq 0$ in EK ist, und diejenigen, die konvex in einer Richtung sind, also insbesondere auch K (s. Robertson [7]). Für diese Funktionen entspricht die Aussage des Satz 4 gerade der des Lemma 1.

Wir zeigen nun, daß noch zwei weitere bekannte Resultate in unserem Satz enthalten sind:

Lemma 4 (Rahmanov [6]). *Sei* $g\in K$, $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. *Dann ist*

$$f(z):=\frac{1}{1+e^{i\alpha}}\left[g(z)+e^{i\alpha}zg'(z)\right]\in S.$$

Beweis. Wir beweisen, daß sogar $f(z)\in C$ gilt. Es ist nämlich $f(z)=f_0(z)*g(z)$ mit

$$f_0(z)=\frac{1}{1+e^{i\alpha}}\left[\frac{z}{1-z}+e^{i\alpha}\frac{z}{(1-z)^2}\right].$$

Für f_0 gilt aber

$$\operatorname{Re}\left[(1+e^{-i\alpha})(1-z)^2 f_0'(z)\right]=\operatorname{Re}\left[\frac{1+e^{-i\alpha}}{1+e^{i\alpha}}\right]+\operatorname{Re}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]>0$$

in $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, so daß Satz 4 anwendbar ist.

Lemma 5 (Sheil-Small [11]). *Sei* $g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^k\in K$. *Dann ist* $Q_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}z^k\in C$, $n\in\mathbb{N}$.

Beweis. Es ist $Q_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k}*g$, und

$$\operatorname{Re}\left[(1-z)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k}\right)'\right]=\operatorname{Re}(1-z^n)>0,$$

woraus alles folgt.

Ebenso leicht findet man, unter Verwendung der Bezeichnungen von Lemma 5:

Satz 5. *Sei $g \in K$. Dann ist* $\frac{1}{2}[Q_{2n-1}(z)-Q_{2n-1}(-z)] \in C$, $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es ist $\frac{1}{2}[Q_{2n-1}(z)-Q_{2n-1}(-z)] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} * g$ und

$$\operatorname{Re}\left[(1-z^2)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}\right)'\right] = \operatorname{Re}(1-z^{2n}) > 0.$$

Literatur

1. Epstein, B., Schoenberg, I.J.: On a conjecture concerning schlicht functions. Bull. Amer. Math. Soc. **65**, 273–275 (1959).
2. Herglotz, G.: Leipziger Berichte **63**, 501–511 (1911).
3. Kaplan, W.: Close-to-convex schlicht functions. Michigan Math. J. **1**, 169–185 (1952).
4. Mairhuber, J.C., Schoenberg, I.J., Williamson, R.E.: On variation diminishing transformations on the circle. Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **8**, 241–270 (1959).
5. Pólya, G., Schoenberg, I.J.: Remarks on the de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle. Pacific J. Mat. Mech. **8**, 295–334 (1958).
6. Rahmanov, B.N.: On the theory of univalent functions. Doklady Akad. Nauk. SSSR, **78**, 209–211 (1951).
7. Robertson, M.S.: Analytic functions starlike in one direction. Amer. J. Math. **58**, 465–472 (1936).
8. Ruscheweyh, St.: Geometrische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $(1-z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} - n(n+1)w = 0$. Unveröffentlicht.
9. Ruscheweyh, St., Wirths, K.J.: Über die Faltung schlichter Funktionen. II. Unveröffentlicht.
10. Sheil-Small, T.: On convex univalent functions. J. London Math. Soc. (2), **1**, 483–492 (1969).
11. Sheil-Small, T.: A note on the partial sums of convex schlicht functions. Bull. London Math. Soc. **2**, 165–168 (1970).
12. Strohhäcker, E.: Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen. Math. Z. **37**, 356–380 (1933).
13. Suffridge, T.J.: Convolutions of convex functions. J. Math. Mech. **15**, 795–804 (1966).

Prof. Stephan Ruscheweyh
Math. Institut d. Univ. Bonn
D-5300 Bonn, Wegelerstraße 10
Deutschland

(Eingegangen am 8. März 1972)