Math. Z. 142, 19–23 (1975)

Nichtlineare Extremalprobleme für holomorphe Stieltjesintegrale

Stephan Ruscheweyh

Sei Λ die Menge der stetigen linearen Funktionale auf der Menge A der im Einheitskreis $EK = \{|z| < 1\}$ holomorphen Funktionen (wobei sich die Stetigkeit auf die Topologie der kompakten Konvergenz in EK bezieht). Zahlreiche Extremalprobleme der Funktionentheorie lassen sich auf einer der folgenden Formen bringen: Man bestimme die Extrema der Ausdrücke

$$\operatorname{Re}\frac{\lambda_1(f)}{\lambda_2(f)}, \quad \left|\frac{\lambda_1(f)}{\lambda_2(f)}\right|, \quad \text{oder} \quad \frac{\operatorname{Re}\lambda_1(f)}{\operatorname{Re}\lambda_2(f)} \tag{1}$$

über einer Teilmenge $V \subset A$ und für gewisse $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. In der vorliegenden Note benutzen wir eine äußerst elementare Methode zur allgemeinen Behandlung dieser und ähnlicher Fragestellungen bei Funktionenklassen, die durch Stieltjesintegrale eines bestimmten Typs gegeben sind.

Außerdem geben wir einige Anwendungsbeispiele für unser Ergebnis. So beweisen wir z.B., daß die konvexen Linearkombinationen $\gamma f(z) + (1-\gamma) g(z)$, wobei f, g konvexe Funktionen der Ordnung $\frac{1}{2}$ in EK sind, im allgemeinen nicht sternförmig in EK sein müssen, wodurch eine Vermutung von Silverman [7] widerlegt wird. Für die Funktionen $f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in A$, die in EK positiven Realteil haben, geben wir scharfe Abschätzungen der Funktionale $\operatorname{Re}(2-a_n)/\operatorname{Re}(2-a_m)$ an und behandeln ähnliche Probleme auch für die Klassen der in EK sternförmigen bzw. typisch-reellen Funktionen.

Sei $M[a, b]$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem reellen Intervall $[a, b]$. $g(z, t)$ sei stetig in $(z, t) \in EK \times [a, b]$ und holomorph in $z \in EK$. Mit $V = V_g[a, b]$ bezeichnen wir die Menge der Funktionen

$$f(z) = \int_a^b g(z, t)\, d\mu(t), \qquad \mu \in M[a, b], \tag{2}$$

während V^j, $j = 1, 2$, die Menge der Funktionen $f \in V$ repräsentiert, für die $\mu(t)$ in (2) als eine Treppenfunktion mit höchstens j Sprungstellen gewählt werden kann.

Satz 1a. *Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $0 \notin \lambda_2(V^2)$. Sei $f \in V$. Dann gibt es ein $f_0 \in V^2$, so daß*

$$\frac{\lambda_1(f)}{\lambda_2(f)} = \frac{\lambda_1(f_0)}{\lambda_2(f_0)}$$

gilt.

Beweis. Sei $\lambda \in \Lambda$. Offensichtlich ist $\lambda(V)$ die abgeschlossene konvexe Hülle der stetigen Kurve $\sigma(t)=\lambda(g(z,t))$, $t\in[a,b]$, und es ist klar, daß sich jeder Punkt dieser konvexen Hülle als konvexe Linearkombination zweier Punkte von $\sigma(t)$ darstellen läßt. Aus der Linearität von λ ergibt sich damit: $\lambda(V)=\lambda(V^2)$. Sei nun $f\in V$. Wegen $0\notin\lambda_2(V^2)=\lambda_2(V)$ gilt $\lambda_2(f)\neq 0$. Man bestimme $u\in\mathbb{C}$ so, daß für $\lambda_{(u)}=\lambda_1-u\lambda_2\in\Lambda$ gilt: $\lambda_{(u)}(f)=0$. Wegen $\lambda_{(u)}(V)=\lambda_{(u)}(V^2)$ gibt es ein $f_0\in V^2$ mit $\lambda_{(u)}(f_0)=0$, woraus die Behauptung des Satzes folgt.

Satz 1b. *Seien $\lambda_1, \lambda_2\in\Lambda$, $0\notin \operatorname{Re}\lambda_2(V^1)$. Sei $f\in V$. Dann gibt es ein $f_0\in V^1$, so daß*

$$\frac{\operatorname{Re}\lambda_1(f)}{\operatorname{Re}\lambda_2(f)}=\frac{\operatorname{Re}\lambda_1(f_0)}{\operatorname{Re}\lambda_2(f_0)}$$

gilt.

Beweis. Für $\lambda\in\Lambda$ gilt offenbar $\operatorname{Re}\lambda(V)=\operatorname{Re}\lambda(V^1)$. Für $f\in V$ gibt es ein $u\in\mathbb{R}$, so daß für $\lambda_{(u)}=\lambda_1-u\lambda_2\in\Lambda$ gilt: $\operatorname{Re}\lambda_{(u)}(f)=0$. Damit existiert aber auch ein $f_0\in V^1$ mit $\operatorname{Re}\lambda_{(u)}(f_0)=0$.

Ein typisches Problem der Form (1) ist die Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Konvexitäts- bzw. Sternförmigkeitsradius für Funktionenklassen, die durch Stieltjesintegrale (2) gegeben sind. Die üblicherweise zur Lösung solcher Probleme herangezogene, allgemeinere Extremalaufgabe der Form

$$\operatorname*{extr}_{f\in V} \operatorname{Re} H\big(f(c), f'(c), \ldots, f^{(n)}(c), c\big),$$

wobei H eine geeignete holomorphe Funktion ihrer Variablen ist, liefert meistens schwächere Aussagen über die Struktur der Extremalfunktionen und erhöht damit den Rechenaufwand. Zum Beispiel haben Kirwan [3] bzw. Wirths [10] die Sternförmigkeitsradien der typisch-reellen bzw. total-monotonen Funktionen unter Benutzung der allgemeinen Lösung der obigen Extremalaufgabe berechnet. Sie mußten dementsprechend Funktionen der Form

$$\sum_{k=1}^{3}\gamma_k g(z,t_k), \qquad \gamma_k\geqq 0, \qquad \sum_{k=1}^{3}\gamma_k=1,$$

betrachten. Satz 1a zeigt, daß es in diesen Fällen ausgereicht hätte, konvexe Linearkombinationen mit nur zwei Summanden zu untersuchen.

Anwendungen

a) Sei $f(z)$ holomorph in EK, $f(0)=f'(0)-1=0$. $f(z)$ heißt konvex von der Ordnung α, $0\leqq\alpha<1$, wenn $\operatorname{Re}\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}+1>\alpha$, $z\in EK$, gilt. Wir bezeichnen die Klasse dieser Funktionen mit $K(\alpha)$. MacGregor [5] zeigte, daß eine konvexe Linearkombination zweier Funktionen aus $K(0)$ EK im allgemeinen nicht schlicht abbildet. Silverman [7] bewies, daß dieses jedoch für $K(\frac{1}{2})$ zutrifft, und vermutete, daß die vermittelten Abbildungen sogar sternförmig sind.

Satz 2. *Eine konvexe Linearkombination $\gamma f(z)+(1-\gamma)g(z)$, $\gamma\in[0,1]$, zweier Funktionen $f, g\in K(\frac{1}{2})$ bildet den EK nicht notwendig auf ein sternförmiges Gebiet ab.*

Beweis. Sei $g(z,t)=-e^{-it}\log(1-ze^{it})$, $t\in[0,2\pi]$. Dann ist $g(z,t)\in K(\frac{1}{2})$, und gemäß [1] ist $V_g[0,2\pi]$ die abgeschlossene konvexe Hülle von $K(\frac{1}{2})$. Setzt man $\lambda_1(f)=zf'(z)$, $\lambda_2(f)=f(z)$, so ergibt Satz 1a, daß die Funktionen $\gamma g(z,t_1)+(1-\gamma)g(z,t_2)$, $\gamma\in[0,1]$, $t_1,t_2\in[0,2\pi]$ genau dann alle sternförmig in EK sind, wenn dieses für alle Funktionen in $V_g[0,2\pi]$ zutrifft. Andererseits ist aber $V_g[0,2\pi]$ die Menge aller Funktionen $h(z)$ mit $h(0)=h'(0)-1=0$, die in EK holomorph sind und dort $\operatorname{Re} h'(z)>\frac{1}{2}$ erfüllen. Diese Funktionen sind im allgemeinen nicht sternförmig, denn nach einem Resultat von Styer und Wright [8] gibt es ungerade Funktionen $p(z)$, $q(z)\in K(0)$ und $\gamma\in[0,1]$, so daß

$$h(z)=\gamma p(z)+(1-\gamma)q(z)$$

nicht sternförmig ist. Andererseits gilt, nach Strohhäcker [9], für ungerade konvexe Funktionen f die Ungleichung $\operatorname{Re} f'(z)>\frac{1}{2}$, und damit ist auch $\operatorname{Re} h'(z)>\frac{1}{2}$, $z\in EK$.

b) Die Funktionen $f\in V_g[-1,1]$, $g(z,t)=z/(1-tz)$, sind fast-konvex in EK. Sei $P_n(z,f)$ die n-te Partialsumme von $f(z)$.

Satz 3. *Sei $f(z)\in V_g[-1,1]$, $g(z,t)=z/(1-tz)$. Dann gilt*

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{P_n(z,f)}>\tfrac{1}{2},\qquad z\in EK,\ n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Beweis. Da $f(z)$ schlicht ist, gilt $f(z)/z\neq 0$, $z\in EK$. Zum Beweis von (3) müssen wir zeigen, daß $|(P_n(z,f)/f(z))-1|<1$, $z\in EK$, $n\in\mathbb{N}$, gilt. Nach Satz 1a genügt es, (3) für $f_0(z)=\gamma g(z,t_1)+(1-\gamma)g(z,t_2)$, $\gamma\in[0,1]$, $t_1,t_2\in[-1,1]$, zu beweisen. Es gilt

$$\frac{P_n(z,f_0)}{f_0(z)}-1=(zt_1)^{n+1}\left[1+\frac{(t_2/t_1)^{n+1}-1}{\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\,\dfrac{1-t_2z}{1-t_1z}+1}\right], \tag{4}$$

so daß im Falle $(t_2/t_1)^{n+1}=1$ die Behauptung folgt. Wir können nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $|t_2|\leqq|t_1|$, und $(t_2/t_1)^{n+1}<1$ ist. Dann folgt wegen $\operatorname{Re}[(1-t_2z)/(1-t_1z)]>0$

$$\operatorname{Re}\frac{\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\,\dfrac{1-t_2z}{1-t_1z}+1}{(t_2/t_1)^{n+1}-1}>\tfrac{1}{2},\qquad z\in EK. \tag{5}$$

(4) und (5) ergeben zusammen die Behauptung des Satzes.

Bemerkung. Ein (3) entsprechendes Ergebnis wurde auch für die Funktionen $f(z)$ bewiesen, die sternförmig von der Ordnung $\frac{1}{2}$ sind [6]. Jedoch zeigt das Beispiel der Funktion

$$f_0(z)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{1-\varepsilon z}+\frac{z}{1-\bar\varepsilon z}\right),\qquad \varepsilon=(1+i)/\sqrt{2},$$

daß (3) nicht für alle Funktionen $f(z)$ mit $f(0)=f'(0)-1=0$ und $\operatorname{Re}(f(z)/z)>\frac{1}{2}$, $z\in EK$, gilt. Es ist nämlich $f_0(1)/P_2(1,f_0)=1/(2+\sqrt{2})<\frac{1}{2}$.

c) Sei P die Menge der Funktionen $f(z)$, die in EK holomorph sind und dort $f(0)=1$, $\operatorname{Re} f(z)>0$ erfüllen.

Satz 4. *Sei m ein Teiler von n. Dann gilt für $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in P$*

$$\operatorname{Re}(2-a_n) \leqq (n/m)^2 \operatorname{Re}(2-a_m).$$

Diese Abschätzung ist nicht zu verbessern.

Beweis. Es ist $P=V_g[0, 2\pi]$ mit $g(z,t)=(1+e^{-it}z)/(1-e^{-it}z)$. Sei $\delta \geqq 1$, $\lambda_1(f)=2f(0)-f^{(n)}(0)/n!$, $\lambda_2(f)=2\delta f(0)-f^{(m)}(0)/m!$. Nach Satz 1b wird der Wertevorrat des Funktionals $F_\delta(f)=(\operatorname{Re}\lambda_1(f))/(\operatorname{Re}\lambda_2(f))$, $\delta>1$, über P bereits von den Funktionen $g(z,t)$, $t\in[0,2\pi]$, angenommen, da $|\lambda_2(f)|\geqq 2\delta-|a_m|>0$ für $f\in P$ gilt. Offenbar ist

$$\max_{f\in P} F_\delta(f)=\max_t \frac{1-\cos nt}{\delta-\cos mt}<(n/m)^2.$$

Setzt man nämlich $n=km$, $k\in\mathbb{N}$, und $\varphi=mt/2$, so ist

$$\frac{1-\cos nt}{\delta-\cos mt}<\frac{1-\cos nt}{1-\cos mt}=\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{mt}{2}}\right)^2=\left(\frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\leqq k^2.$$

Mit $\delta\to 1$ ergibt sich die behauptete Abschätzung. Daß diese nicht verbessert werden kann, folgt aus $\lim_{t\to 0} F_1(g(z,t))=(n/m)^2$.

Korollar. *Sei $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ schlicht und sternförmig in EK. Sei $(m-1)$ ein Teiler von $(n-1)$. Dann gilt*

$$\operatorname{Re}(n-a_n)\leqq \frac{n(n-1)^2}{m(m-1)^2}\operatorname{Re}(m-a_m).$$

Diese Schranke kann nicht verbessert werden.

Beweis. Wenn $f(z)$ sternförmig in EK ist, so ist $g(z)=\frac{2}{z}\int_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt-1$ in P. Satz 4 liefert unmittelbar die Behauptung. Betrachtet man die Funktionen $z(1-e^{-it}z)^{-2}$ für $t\to 0$, so ergibt sich die Schärfe unserer Aussage.

Bemerkung. Hummel [2] zeigte, daß unter den Voraussetzungen des Korollars gilt:

$$|n-a_n|\leqq \frac{n(n^2-1)}{6}|2-a_2|, \qquad n=3,4,\ldots. \tag{6}$$

d) Die Sätze 1a und 1b ermöglichen es natürlich, weitere ähnliche Probleme wie das in Satz 4 und seinem Korollar behandelte anzugreifen. Wir zeigen zum Abschluß noch, daß ein erst kürzlich erzieltes Resultat von Leeman [4] bezüglich typisch-reeller Funktionen ebenfalls sehr leicht mit unserer Methode und unter Verwendung von (6) hergeleitet werden kann.

Satz 5. *Sei* $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ *typisch-reell in EK. Dann gilt für* $n=3,4,\ldots$

$$n-a_n \leqq \frac{n(n^2-1)}{6}(2-a_2).$$

Diese Abschätzung ist nicht zu verbessern.

Beweis. Für $0<\delta\leqq 1$ sei $T_\delta=V_{g_\delta}[0,\pi]$, $g_\delta(z,t)=z/(1-2z\delta\cos t+(\delta z)^2)$. Dann ist T_1 die Menge der typisch-reellen Funktionen. Sei $\lambda_1(f)=nf'(0)-f^{(n)}(0)/n!$, $\lambda_2(f)=2f'(0)-f''(0)/2$. Offenbar ist $\lambda_j(f)>0$ für $f\in T_\delta$, $0<\delta<1$, $j=1,2$. Beachtet man dieses und die Tatsache, daß die Funktionen $g_\delta(z,t)$ sternförmig in EK sind, so folgt aus Satz 1b sowie (6):

$$\max_{f\in T_\delta}\frac{\operatorname{Re}\lambda_1(f)}{\operatorname{Re}\lambda_2(f)}=\max_t\left|\frac{\lambda_1(g_\delta(z,t))}{\lambda_2(g_\delta(z,t))}\right|\leqq\frac{n(n^2-1)}{6}.$$

Mit $\delta\to 1$ folgt die Behauptung. Die Untersuchung von $g_1(z,t)$, $t\to 0$, zeigt, daß die im Satz genannte Schranke scharf ist.

Literatur

1. Brickman, L., Hallenbeck, D.J., MacGregor, T.H., Wilken, D.R.: Convex hulls and extreme points of families of starlike and convex mappings. Trans. Amer. math. Soc. **185**, 413–428 (1973)
2. Hummel, J.A.: The coefficients of starlike functions. Proc. Amer. math. Soc. **22**, 311–315 (1969)
3. Kirwan, E.: Extremal problems for typically real functions. Amer. J. Math. **88**, 942–953 (1966)
4. Leeman, G.B.: A local estimate for typically real functions. Pacific J. Math. (Erscheint demnächst)
5. MacGregor, T.H.: The univalence of a linear combination of convex mappings. J. London math. Soc. **174**, 210–212 (1969)
6. Ruscheweyh, St., Sheil-Small, T.: Hadamard products of schlicht functions and the Pólya-Schoenberg conjecture. Commentarii math. Helvet. **48**, 119–135 (1973)
7. Silverman, H.: Linear combinations of convex mappings. Erscheint im Rocky Mountain J. Math.
8. Styer, D., Wright, D.: On the valence of the sum of two convex functions. Proc. Amer. math. Soc. **37**, 511–516 (1973)
9. Strohhäcker, E.: Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen. Math. Z. **37**, 356–380 (1936)
10. Wirths, K.-J.: Über total-monotone Zahlenfolgen. Preprint

St. Ruscheweyh
Abteilung Mathematik
Universität Dortmund
D-4600 Dortmund-Hombruch
Postfach 500
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 29. Mai 1974)