Monatshefte für Mathematik 78, 246—255 (1974)

Funktionenfamilien mit einem Maximumprinzip und elliptische Differentialgleichungen I

Von

Stephan Ruscheweyh, Dortmund

(Eingegangen am 3. März 1973)

1. Einleitung

Maximumprinzipien verschiedener Natur spielen bei zahlreichen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen insbesondere bei elliptischen Differentialgleichungen im Reellen eine entscheidende Rolle. In der vorliegenden Arbeit werden einige dieser Ideen in einer stark verallgemeinerten Form ins Komplexe übertragen. Zu diesem Zweck werden Funktionenfamilien betrachtet, die neben einer Vektorraumstruktur ein Identitäts- und ein Maximumprinzip tragen. Es zeigt sich, daß gewisse bekannte Resultate schon für diese allgemeinen Familien gelten. Das wird besonders deutlich, wenn man die Existenz von gewissen Grundfunktionen fordert. Man erhält damit die Möglichkeit einer Reihenentwicklung, eine Verallgemeinerung des Poissonschen Satzes und anderes mehr.

Besonderes Interesse erhalten diese Bemerkungen dadurch, daß sich mit ihrer Hilfe eine vollständige Theorie der Lösungsdarstellung bei gewissen elliptischen Differentialgleichungen im Komplexen aufbauen läßt, und sich darüber hinaus Aussagen über das Wachstumsverhalten dieser Lösungen gewinnen lassen (z. B. Analoga zum Hadamardschen Dreikreisesatz). Das wird in Teil II dieser Arbeit durchgeführt werden.

2. Familien vom Typ $\mathfrak{F}$

Im folgenden sei G ein beschränktes Gebiet der z-Ebene.

Definition 1

$\mathfrak{F}$ sei eine Familie in G stetiger Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Mit* $f(z)$, $g(z) \in \mathfrak{F}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, *liegen auch* $\overline{f(z)}$, $\alpha f(z)$ *und* $h(z) = f(z) + g(z)$ *in* $\mathfrak{F}$.

2. *Jede Konstante liegt in* $\mathfrak{F}$.

3. *Wenn* $f(z) = g(z)$ *in allen Punkten einer offenen Umgebung eines Punktes* $z_0 \in G$ *gilt, so ist* $f(z) = g(z)$ *in* G.

4. $\operatorname{Re} f(z)$ *nimmt im Innern von* G *kein relatives Maximum an, oder es ist* $f(z) \equiv \mathrm{const.}$ *in* G.

Eine allgemeine Eigenschaft der Funktionen aus einer Familie $\mathfrak{F}$ wird im folgenden Satz herausgestellt.

Satz 1

Für $f(z) \in \mathfrak{F}$ *gilt:*

1. $|f(z)|$ *nimmt im Innern von* G *kein relatives Maximum an, oder es ist* $f(z) \equiv \mathrm{const.}$ *in* G.

2. *Wenn die Menge* $f(G)$ *beschränkt ist, dann liegt sie ganz im Innern der konvexen Hülle der Randwerte von* f *(bei Annäherung an den Rand von* G*), oder es ist* $f(z) \equiv \mathrm{const.}$ *in* G.

Bemerkung:

Unter dem Innern einer konvexen Menge verstehen wir das Innere bezüglich des kleinsten, diese Menge enthaltenden, affinen Unterraumes von $\mathbb{C}$.

Beweis: 1. Sei $|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$ für alle $z \in \mathfrak{U}(z_0) \subset G$, und $f(z_0) = e^{i\varphi}|f(z_0)|$. Die Funktion $g(z) := \operatorname{Re} e^{-i\varphi} f(z)$ liegt in $\mathfrak{F}$, und es gilt für alle $z \in \mathfrak{U}(z_0)$

$$g(z_0) = |f(z_0)| \geqslant |f(z)| \geqslant \operatorname{Re} e^{-i\varphi} f(z) = g(z).$$

Aus dem Maximumprinzip folgt $g(z) \equiv g(z_0)$. Dann ist aber in $\mathfrak{U}(z_0)$

$$\begin{aligned} g(z_0)^2 \geqslant |f(z)|^2 &= g(z)^2 + [\operatorname{Im} e^{-i\varphi} f(z)]^2 \\ &= g(z_0)^2 + [\operatorname{Im} e^{-i\varphi} f(z)]^2, \end{aligned}$$

also $\operatorname{Im} e^{-i\varphi} f(z) = 0$ in $\mathfrak{U}(z_0)$ und damit auch in G.

2. Sei $f(z)$ nicht konstant und K die konvexe Hülle der Randwerte von f. Dann besteht K nicht nur aus einem einzigen Punkt a, denn sonst würde aus dem Maximumprinzip für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ folgen: $\operatorname{Re} e^{i\varphi}[f(z) - a] \leqslant 0$, also $f(z) \equiv a$. Sei $w_0 = f(z_0) \in \mathring{K}$, dem Innern von K, für ein $z_0 \in G$. Dann gibt es eine trennende Gerade $\mathfrak{g}$ durch w_0, so daß K ganz auf einer Seite von $\mathfrak{g}$ liegt.

Insbesondere kann man $\mathfrak{g}$ so wählen, daß es mindestens einen Randwert w_1 von f gibt, so daß $w_1 \notin \mathfrak{g}$ gilt. Das Lot auf $\mathfrak{g}$ durch den Nullpunkt habe mit der positiven reellen Achse den Winkel σ. Sei $f^*(z) := \delta f(z)$ mit

$$\delta := \begin{cases} e^{-i\sigma} & \text{für } \operatorname{Re} e^{-i\sigma} w_1 < \operatorname{Re} e^{-i\sigma} w_0 \\ -e^{-i\sigma} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bei dieser Transformation geht $\mathfrak{g}$ in die Gerade $\mathfrak{g}^* := \{w \mid \operatorname{Re} w = \alpha\}$ mit $\alpha = \operatorname{Re} \delta w_0$ über. Für die Punkte w^* der konvexen Hülle K^* der Randwerte von f^* gilt: $\operatorname{Re} w^* \leqslant \alpha$, und es ist $\operatorname{Re} w_1^* = \operatorname{Re} \delta w_1 < \alpha$. Die Funktion $g(z) = \operatorname{Re} f^*(z)$ liegt in $\mathfrak{F}$. Sei $\beta := \sup\limits_{z \in G} g(z)$. Dann ist $\beta \geqslant \alpha = g(z_0)$. Wir zeigen, daß es einen Punkt $z' \in G$ gibt, so daß $g(z') = \beta$ ist. Wenn $\beta = \alpha$ ist, so genügt es, $z' = z_0$ zu wählen. Sonst gibt es eine Folge $z_k \in G$, $k \in \mathbb{N}$, mit $\lim\limits_{k \to \infty} g(z_k) = \beta$. Diese Folge besitzt in dem Kompaktum $\bar{G}$ einen Häufungspunkt z', der jedoch nicht auf dem Rand von G liegen kann, da für alle Randwerte a von g stets $a \leqslant \alpha < \beta$ gilt. Also ist $z' \in G$, und wegen der Stetigkeit von $g(z)$ ist $g(z') = \beta$. Das bedeutet aber, daß $g(z)$ in z' ein Maximum annimmt, was $g(z) \equiv \beta$ zur Folge hat. Wegen $\operatorname{Re} w_1^* < \beta$ haben wir einen Widerspruch.

Für gewisse Familien $\mathfrak{F}$ gilt ein Analogon zum *Hadamardschen Dreikreisesatz*:

Satz 2

Sei $G := \{z \mid 0 < R_1 < |z| < R_2\}$. *In* $\mathfrak{F}$ *gebe es eine reellwertige Funktion* $h(z)$, *für die*

$$\lim_{|z| \to R_j} h(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 1 \\ 1 & \text{für } j = 2 \end{cases}$$

gilt. Sei $f(z) \in \mathfrak{F}$, *und es gelte* $\overline{\lim\limits_{|z| \to R_j}} |f(z)| \leqslant M_j, j = 1, 2$. *Dann ist in* G:

$$|f(z)| \leqslant M_1 + (M_2 - M_1) h(z),$$

und das Gleichheitszeichen kann in einem inneren Punkt von G *nur stehen, wenn*

$$f(z) \equiv e^{i\gamma} [M_1 + (M_2 - M_1) h(z)], \gamma \in \mathbb{R},$$

ist.

Beweis: Für jedes $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist

$$f_\varphi(z) := \operatorname{Re} e^{i\varphi} f(z) - M_1 - (M_2 - M_1)\, h(z)$$

in $\mathfrak{F}$, und es gilt $\overline{\lim\limits_{|z| \to R_j}} f_\varphi(z) \leqslant 0$, $j = 1, 2$. Aus dem Maximumprinzip in G folgt dann:

$$\operatorname{Re} e^{i\varphi} f(z) \leqslant M_1 + (M_2 - M_1)\, h(z).$$

Setzt man nun in einem festen Punkt $z_0 \in G$: $\varphi = -\arg f(z_0)$, so folgt die erste Behauptung. Steht in einem inneren Punkt von G das Gleichheitszeichen, so ist für ein geeignetes φ: $f_\varphi(z) \equiv 0$, also $\lim\limits_{|z| \to R_j} \operatorname{Re} e^{i\varphi} f(z) = M_j$. Dann ist aber

$$M_j^2 \geqslant \overline{\lim_{|z| \to R_j}} |e^{i\varphi} f(z)|^2 = M_j^2 + \overline{\lim_{|z| \to R_j}} [\operatorname{Im} e^{i\varphi} f(z)]^2.$$

Deshalb ist $\operatorname{Im} e^{i\varphi} f(z) \equiv 0$ in G.

3. Familien vom Typ $\mathfrak{F}^*$

Für $G = K_R := \{z \mid |z| < R\}$ definieren wir Familien, die gegenüber den Familien $\mathfrak{F}$ eine zusätzliche Eigenschaft besitzen:

Definition 2

Eine Familie $\mathfrak{F}$ in K_R ist vom Typ $\mathfrak{F}^*$, wenn es in $\mathfrak{F}$ eine Funktionenfolge $h_k(z) = z^k P_k(|z|)$, $k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $P_k(0) = 1$,

2. *Es gibt ein $\varepsilon < 1$, so daß für alle $k \geqslant k_0$ die Funktionen $r^{\varepsilon k} |P_k(r)|$ in $0 \leqslant r < R$ monoton wachsen.*

Mit Hilfe der „Grundfunktionen" $h_k(z)$ kann man eine Reihenentwicklung der Funktionen aus $\mathfrak{F}^*$ durchführen.

Satz 3

Sei $f(z) \in \mathfrak{F}^*$. Dann besitzt $f(z)$ in K_R eine Reihenentwicklung

$$f(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k h_k(z) + B_k \overline{h_k(z)}], \quad A_k, B_k \in \mathbb{C}.$$

Diese Reihe ist in jedem in K_R gelegenen Kompaktum gleichmäßig und absolut konvergent. Die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt.

Beweis: 1. Sei $0 < R' < R$. Die Funktion $f(R' e^{i\varphi})$ ist stetig und periodisch mit der Periode 2π. Sei

$$f(R' e^{i\varphi}) \sim \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k e^{ik\varphi} + \beta_k e^{-ik\varphi}]$$

die Fourierentwicklung von $f(R' e^{i\varphi})$. Dann konvergieren die Fejérschen Mittel

$$\sigma_m(e^{i\varphi}) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{m-k+1}{m+1} [\alpha_k e^{ik\varphi} + \beta_k e^{-ik\varphi}]$$

gleichmäßig gegen $f(R' e^{i\varphi})$ (vgl. [1], S. 93). Die Funktionen

$$\sigma_m^*(z) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{m-k+1}{m+1} \left[\alpha_k \frac{h_k(z)}{h_k(R')} + \beta_k \frac{\overline{h_k(\bar{z})}}{\overline{h_k(R')}}\right]$$

liegen in $\mathfrak{F}^*$, und es gilt $\sigma_m(e^{i\varphi}) = \sigma_m^*(R' e^{i\varphi})$. Sei nun $\delta > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $m_0 = m_0(\delta)$, so daß $|f(R' e^{i\varphi}) - \sigma_m^*(R' e^{i\varphi})| < \delta$ ist, für alle $m \geqslant m_0$ und alle φ. Da die Funktionen $f(z) - \sigma_m^*(z)$ zu $\mathfrak{F}^*$ gehören, folgt aus dem Maximumprinzip $|f(z) - \sigma_m^*(z)| < \delta$ für alle $|z| \leqslant R'$. Sei

$$s_m(z) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} \left[\alpha_k \frac{h_k(z)}{h_k(R')} + \beta_k \frac{\overline{h_k(\bar{z})}}{\overline{h_k(R')}}\right]$$

und $0 < r < R'$. Dann ist in $|z| \leqslant r$:

$$|f(z) - s_m(z)| \leqslant |f(z) - \sigma_m^*(z)| + |\sigma_m^*(z) - s_m(z)|$$
$$< \delta + |\sigma_m^*(z) - s_m(z)|.$$

Wir schätzen nun die zweite Differenz ab. Es ist

$$|\sigma_m^*(z) - s_m(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m+1} (|\alpha_k| + |\beta_k|) \left|\frac{h_k(r)}{h_k(R')}\right|,$$

da $h_k(r)$ monoton wächst. Die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion sind beschränkt: $|\alpha_k| + |\beta_k| \leqslant C$, $k \in \mathbb{N}$. Da außerdem für $k \geqslant k_0$ $|r^{\varepsilon k} P_k(r)|$ monoton wächst, ist für diese k

$$\left|\frac{h_k(r)}{h_k(R')}\right| \leqslant \left(\frac{r}{R'}\right)^{k-\varepsilon k}.$$

Für $m \geqslant k_0$ hat man dann

$$|\sigma_m^*(z) - s_m(z)| \leqslant \frac{C}{m+1}\left[\sum_{k=1}^{k_0-1} k \left|\frac{h_k(r)}{h_k(R')}\right| + \sum_{k=k_0}^{\infty} k \left(\frac{r}{R'}\right)^{k-\varepsilon k}\right].$$

Da $\varepsilon < 1$ und $r < R'$ ist, ist auch die zweite Summe beschränkt, und man kann m so groß wählen, daß $|\sigma_m^*(z) - s_m(z)| < \delta$ wird, und also $|f(z) - s_m(z)| < 2\delta$. Setzt man nun noch

$$A_0 = \alpha_0, \quad A_k = \frac{\alpha_k}{h_k(R')}, \quad B_k = \frac{\beta_k}{\overline{h_k(R')}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

so ergibt sich für $f(z)$ in $|z| < R'$ die gewünschte Reihenentwicklung, die in jedem in $K_{R'}$ gelegenen Kompaktum gleichmäßig und absolut konvergiert.

2. Wir haben jetzt nur noch zu zeigen, daß die Koeffizienten A_k, B_k eindeutig bestimmt sind und nicht von $R' < R$ abhängen. Seien A'_k, B'_k, A''_k, B''_k zwei Koeffizientenfolgen der obigen Art, die zu den Radien R', $R'' < R$ gehören. Dann ist auf $0 < |z| = r < \min(R', R'')$ mit $z = r e^{i\varphi}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(A'_k - A''_k) h_k(z) + (B'_k - B''_k)\overline{h_k(z)}\right] e^{ij\varphi}\, d\varphi = 0,$$

für alle $j \in \mathbb{Z}$. Damit wird aber, wegen der bekannten Orthogonalitätsrelationen,

$$0 = \begin{cases} h_{|j|}(r)\,(A'_{|j|} - A''_{|j|}), & j < 0, \\ \overline{h_j(r)}\,(B'_j - B''_j), & j > 0. \end{cases}$$

Da $h_j(r) \neq 0$ für $r \neq 0$ ist, und $f(0) = A'_0 = A''_0$ gilt, ist die Unabhängigkeit und Eindeutigkeit ($R' = R''$!) gezeigt.

Aus der obigen Entwicklung ergibt sich für $r < R'$:

$$A_k h_k(r e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R' e^{i\alpha})\,\frac{h_k(r)}{h_k(R')}\, e^{ik(\varphi-\alpha)}\, d\alpha,$$

$$B_k \overline{h_k(r e^{i\varphi})} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R' e^{i\alpha})\,\frac{\overline{h_k(r)}}{\overline{h_k(R')}}\, e^{-ik(\varphi-\alpha)}\, d\alpha,$$

so daß wir die folgende Verallgemeinerung der *Poissonschen Integralformel* haben.

Satz 4

Sei $f(z) \in \mathfrak{F}^*$. Dann gilt in $|z| < R' < R$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R' e^{i\alpha}) F_{R'}(z e^{-i\alpha})\, d\alpha,$$

mit

$$F_{R'}(z) := \operatorname{Re}\left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(z)}{h_k(R')}\right]. \tag{1}$$

Die Funktion $F_{R'}(z)$ liefert ein notwendiges Kriterium dafür, daß eine Funktionenfolge $h_k(z)$ eine Familie vom Typ $\mathfrak{F}^*$ konstituiert. Dazu benötigen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1

Seien die Funktionen $h_k(z) \in \mathfrak{F}^*$ wie in Definition 2 erklärt, und die Reihe $f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k h_k(z)$ sei in $K_{R'} \subset K_R$ konvergent, und zwar gleichmäßig in jedem in $K_{R'}$ gelegenen Kompaktum. Dann ist $M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$ in $0 \leqslant r < R'$ monoton wachsend.

Den einfachen Beweis können wir übergehen. Im folgenden nennen wir eine in $|z| < 1$ holomorphe Funktion $b(z)$ *unimodular beschränkt* (u. b.), wenn sie dort $|b(z)| \leqslant 1$ erfüllt.

Hilfssatz 2

Sei $p(\alpha)$ eine reellwertige, stetige Funktion mit der Periode 2π, die der Bedingung

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\alpha)\, d\alpha > 0$$

genügt. Damit für jede u. b. *Funktion $b(z)$ und alle $0 < r < 1$*

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(r e^{i\alpha})\, p(\alpha)\, d\alpha \right| \leqslant J$$

gilt, ist notwendig und hinreichend, daß $p(\alpha) \geqslant 0$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ ist. Dieser Satz wurde von SCHUR und SZEGÖ [3] bewiesen.

Satz 5

Seien die Funktionen $h_k(z) \in \mathfrak{F}^*$ *wie in Definition 2 erklärt, und* $F_{R'}(z)$ *gemäß* (1) *gesetzt. Dann ist für alle* $|z| < R' < R$ $F_{R'}(z) \geqslant 0$.

Beweis: Sei $b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine beliebige u. b. Funktion und $b_r(z) := b(rz)$, $0 < r < 1$. Dann ist $b_r(z)$ in $|z| \leqslant 1$ holomorph und u. b. Wir setzen $a_k r^k = c_k h_k(R')$, $k \in \mathbb{N}$, und betrachten die Funktion $C_r(\sigma) := a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k h_k(\sigma)$. Diese Reihe konvergiert in $|\sigma| \leqslant R'$ gleichmäßig, was aus der absoluten Konvergenz von $b_r(z)$ auf $|z| = 1$ und dem Maximumprinzip für die $h_k(\sigma)$ leicht folgt. Da außerdem $C_r(R' e^{i\varphi}) = b_r(e^{i\varphi})$ ist, ergibt sich aus Hilfssatz 1: $|C_r(\sigma)| \leqslant 1$ in $|\sigma| \leqslant R'$. Für ein σ mit $|\sigma| < R'$ setzen wir nun $p(\alpha) := F_{R'}(\sigma e^{-i\alpha})$. Dann gilt, in der Bezeichnung von Hilfssatz 2, $J = 1$, und mit Satz 4 ergibt sich

$$1 \geqslant |C_r(\sigma)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b_r(e^{i\alpha}) p(\alpha) \, d\alpha \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(r e^{i\alpha}) p(\alpha) d\alpha \right| .$$

Aus Hilfssatz 2 folgt nun die Behauptung.

Wir stellen jetzt noch einige weitere charakteristische Eigenschaften der Funktionen $f(z) \in \mathfrak{F}^*$ zusammen.

Satz 6

Sei $f(z) \in \mathfrak{F}^*$. *Dann ist*

$$\mu(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\varphi})|^2 d\varphi$$

in $0 \leqslant r < R$ *entweder streng monoton wachsend, oder es ist* $f(z) \equiv const.$

Beweis: Sei $f(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k h_k(z) + B_k \overline{h_k(z)}]$. Die Behauptung ergibt sich dann unmittelbar aus der Gleichung

$$\mu(r) = |A_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [|A_k|^2 + |B_k|^2] \, |h_k(r)|^2,$$

und der Monotonie der $|h_k(r)|$.

Satz 7

Sei $f(z) \in \mathfrak{F}^*$, und es gelte in K_R $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$. Dann ist auf $|z| = r < R$

$$\sup_{r<s<R} \min_{|z|=r} F_s(z) \leqslant \frac{\operatorname{Re} f(z)}{\operatorname{Re} f(0)} \leqslant \inf_{r<s<R} \max_{|z|=r} F_s(z),$$

wobei $F_s(z)$ gemäß (1) gesetzt ist.

Der Beweis ergibt sich leicht aus den Sätzen 4 und 5.

Satz 8

Für die Funktionen $h_k(z) \in \mathfrak{F}^*$ aus Definition 2 gelte: $\lim_{r \to R} |h_k(r)| = \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Sei $f(z) \in \mathfrak{F}^*$ mit $|f(z)| \leqslant M$ in K_R. Dann ist $f(z) \equiv$ const.

Dieser Satz ist ein Analogon zum *Satz von Liouville* in der Funktionentheorie. Zum Beweis betrachte man die Darstellung von $\mu(r)$ im Beweis von Satz 6.

Wenn man sich auf die Teilmenge $\mathfrak{F}_h^* \subset \mathfrak{F}^*$ beschränkt, deren Elemente $f(z)$ in K_R eine Darstellung

$$f(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k h_k(z)$$

besitzen, so kann man eine Erweiterung von Satz 1 beweisen. Dazu ordnen wir jeder Funktion $f(z) \in \mathfrak{F}_h^*$ die Klasse der in $|z| \leqslant r$ $(0 < r < R)$ holomorphen Funktionen $f_r(z)$ zu, die durch $f_r(re^{i\varphi}) = f(re^{i\varphi})$ eindeutig bestimmt sind.

Satz 9

Sei $f(z) \in \mathfrak{F}_h^*$, und $A_r := \{w \mid w = f_r(z)$ für ein $z \in \overline{K_r}\}$, $B_r := \{w \mid w = f(z)$ für ein $z \in \overline{K_r}\}$. Dann ist für alle r mit $0 < r < R$: $A_r \subset B_r \subset KA_r$, wobei KA_r die konvexe Hülle von A_r bezeichnet.

Beweis: Sei $w \in A_r$, und $w \neq f_r(z)$ auf $|z| = r$. Dann ist

$$0 \neq \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f_r'(z)}{f_r(z) - w}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} d \arg [f(z) - w].$$

Also nimmt $f(z)$ den Wert w in K_r mindestens einmal an, womit der erste Teil gezeigt ist. Der zweite Teil folgt unmittelbar aus Satz 1.

Für Anwendungen dieses Sachverhaltes siehe z. B. [2].

Literatur

[1] ROGOSINSKI, W.: Fouriersche Reihen. Berlin. 1930.

[2] RUSCHEWEYH, ST.: Geometrische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $(1-z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}}-n(n+1)w=0$. J. f. reine angew. Math. (im Druck).

[3] SCHUR, I., und G. SZEGÖ: Über Abschnitte einer im Einheitskreis beschränkten Potenzreihe. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse **30**, 545—560 (1925).

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. ST. RUSCHEWEYH
Abteilung Mathematik der Universität Dortmund
Postfach 500
D-4600 Dortmund-Hombruch, Bundesrepublik Deutschland