Einige neue Darstellungen des Di- und Trilogarithmus

Von Stephan Ruscheweyh in Bonn

(Eingegangen am 16. 3. 1972)

1.

Die durch die in $|x| \leqq 1$ konvergenten Potenzreihen

$$(1) \qquad L_s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^s}, \quad s = 2, 3, \ldots,$$

definierten Funktionen (Multilogarithmen) werden durch die Integraldarstellungen

$$(2) \qquad L_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-u)}{u}\, du,$$

$$L_s(x) = \int_0^x \frac{L_{s-1}(u)}{u}\, du, \quad s = 3, 4, \ldots,$$

in die von 1 längs der positiven reellen Achse aufgeschlitzte Ebene holomorph fortgesetzt. In Erweiterung gewisser Ergebnisse von Knopp ([1], S. 275) und Hjortnaes [2] werden wir in dieser Arbeit durch wiederholte Anwendung der Kummerschen Reihentransformation auf neue Reihendarstellungen für die Multilogarithmen geführt werden, die im Falle des Di- (L_2) und des Trilogarithmus (L_3) in bestimmte Integrale umgewandelt werden. Diese liefern wiederum eine analytische Fortsetzung in die oben bezeichnete Schlitzebene. Eine genauere Untersuchung der Darstellung des Trilogarithmus führt außerdem zu der Auswertung eines merkwürdigen bestimmten Integrals.

2.

Zur Transformation von (1) verwenden wir die Reihen

$$M_{ks}(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^{n-k}}{n(n^s - 1^s)(n^s - 2^s) \cdot \ldots \cdot (n^s - k^s)}.$$

Es gelten dann die folgenden Identitäten:

$$
\begin{aligned}
L_{s+1}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{s+1}} \\
&= x\left(\frac{1}{1^{s+1}} + M_{1s}(x)\right) - 1^s \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^{s+1}(n^s - 1^s)} \\
&= x\left(\frac{1}{1^{s+1}} + M_{1s}(x)\right) - x^2 \cdot 1^s \cdot \left(\frac{1}{2^{s+1}(2^s - 1^s)} + M_{2s}(x)\right) \\
&\qquad + 1^s\, 2^s \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n^{s+1}(n^s - 1^s)(n^s - 2^s)} \\
&\;\;\vdots \\
&= \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} [(n-1)!]^s \left[\frac{1}{n} P_{n,n-1} + M_{ns}(x)\right] x^n + R_k(x)
\end{aligned}
$$

mit

$$R_k(x) = (-1)^k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(k!)^s}{n} P_{nk}\, x^n.$$

Dabei ist

$$P_{jk} = \prod_{\substack{\sigma=0 \\ \sigma \neq j}}^{k} (j^s - \sigma^s)^{-1}$$

gesetzt. Wie man leicht nachrechnet, ist in $|x| \leqq 1$

$$|R_k(x)| \leqq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{s+1}},$$

also $\lim_{k \to \infty} R_k(x) = 0$ gleichmäßig in $|x| \leqq 1$. Damit haben wir für $L_{s+1}(x)$ in $|x| \leqq 1$ die neue Reihendarstellung

$$L_{s+1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [(n-1)!]^s \left[\frac{1}{n} P_{n,n-1} + M_{ns}(x)\right] x^n. \tag{3}$$

Wir bestimmen jetzt geschlossene Ausdrücke für die Funktionen $M_{ns}(x)$. Die Partialbruchzerlegung liefert, mit $\varepsilon_s = e^{\frac{2\pi i}{s}}$,

$$n^{s-1} P_{nk} = \frac{1}{s} \sum_{j=0}^{k} P_{jk} \sum_{\mu=1}^{s} \frac{1}{n - j\,\varepsilon_s^{\mu}},$$

also

$$n^{s-1} P_{nk} = \frac{1}{s} \sum_{j=0}^{k} P_{jk} \int_0^1 t^{n-k-1} \sum_{\mu=1}^{s} t^{k - j\varepsilon_s^{\mu}}\, dt.$$

Daraus folgt in $|x| < 1$:

$$M_{ks}(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{s-1} P_{nk} x^{n-k}$$

$$= \frac{x}{s} \sum_{j=0}^{k} P_{jk} \int_0^1 \sum_{\mu=1}^{s} t^{k-j\varepsilon_s^\mu} \frac{dt}{1-x\,t}.$$

Speziell ist

$$M_{k1}(x) = \frac{x}{k!} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{1-x\,t}\, dt, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{4}$$

$$M_{k2}(x) = \frac{x}{(2k)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2k}}{1-x\,t}\, dt, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

3.

Wir beginnen mit dem Dilogarithmus. (3) und (4) ergeben hier

$$L_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! \left[\frac{x}{n!} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{1-x\,t}\, dt + \frac{1}{n \cdot n!} \right] x^n$$

$$= -L_2(-x) + x \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} [x(1-t)]^n \frac{dt}{1-x\,t},$$

und wegen der Funktionalbeziehung $L_2(x) + L_2(-x) = \frac{1}{2} L_2(x^2)$ haben wir

Satz 1. *In der von -1 bzw. 1 längs der negativen bzw. positiven reellen Achse aufgeschlitzten Ebene gilt*

$$L_2(x^2) = 2\,x \int_0^1 \frac{\ln\,[1 + x\,(1-t)]}{1-x\,t}\, dt. \tag{6}$$

Daß diese Darstellung in der ganzen Schlitzebene gilt, folgt daraus, daß das Integral eine in dieser Ebene holomorphe Funktion darstellt, die in $|x| < 1$ mit $L_2(x^2)$ übereinstimmt. Die Behauptung folgt dann aus dem Identitätsprinzip für holomorphe Funktionen.

Die Formel (6) liefert sofort eine Funktionalbeziehung für den Dilogarithmus, die zuerst von LANDEN (siehe z. B. [3]) bewiesen wurde. Für jedes $x \neq 0$ aus der in Satz 1 genannten Schlitzebene folgt nämlich aus (6) und (1):

$$L_2(x^2) = -2\int_1^{1-x} \frac{\ln(x+u)}{u}\,du$$

$$= -2\ln(x)\ln(1-x) - 2\int_{-\frac{1}{x}}^{\frac{x-1}{x}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$$

$$= -2\ln(x)\ln(1-x) - 2L_2\left(-\frac{1}{x}\right) + 2L_2\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Für den Trilogarithmus folgt aus (3) und (5), wenn man x durch $-x^2$ ersetzt,

$$L_3(-x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!^2}{n^2(2n-1)!}x^{2n}$$

$$+\int_0^1 x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!^2}{(2n)!}[x(1-t)]^{2n}\frac{dt}{1+x^2t}.$$

Benutzt man die Reihenentwicklung von $\arcsin^2 u$ in $|u| < 1$, so erhält man

$$L_3(-x^2) = -8\int_0^{x/2} \arcsin^2 u\,\frac{du}{u}$$

$$+2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2t}\arcsin^2\left[\frac{x}{2}(1-t)\right]dt.$$

Nach einer Substitution im zweiten Integral kann man beide zusammenfassen, und es ergibt sich:

Satz 2. *In der von i bzw. — i längs der imaginären Achse aufgeschlitzten Ebene ist*

$$L_3(-x^2) = -8\int_0^{x/2} \frac{1+x^2-\frac{5}{2}ux}{1+x^2-2ux}\arcsin^2 u\,\frac{du}{u}, \tag{7}$$

wobei als Integrationsweg die Strecke zwischen 0 *und* $x/2$ *zu wählen ist.*

Beweis. Da (7) in $|x| < 1$ richtig ist, haben wir nur ihre Fortsetzung in die beschriebene Schlitzebene zu beweisen. Das Integral auf der rechten Seite von (7) ist eine holomorphe Funktion in Gebieten, in denen der Integrand auf dem ganzen Integrationsweg eindeutig und stetig ist. Die Funktion $1 + x^2 - 2\,u\,x$ hat auf dem Integrationsweg höchstens dann eine Nullstelle, wenn $x = \pm\, i\,\alpha$, $\alpha \geqq 1$, ist. In $u = 0$ ist der Integrand holomorph. Der $\arcsin u$ ist in der von $u = \pm 1$ längs der positiven bzw. negativen reellen Achse aufgeschlitzten u-Ebene eindeutig, so daß unsere Formel in der von ± 2, $\pm i$ jeweils nach unendlich aufgeschlitzten x-Ebene richtig ist.

Wir betrachten jetzt den Fall $x > 2$. Der Integrationsweg verläuft nun durch $u = 1$. Von diesem Punkt an ist der $\arcsin u$ nicht mehr eindeutig. Nähert man sich jedoch dem Punkt x aus der oberen Halbebene, so folgt aus Stetigkeitsgründen die Richtigkeit von (7), wenn man dem arcsin die Werte vom oberen Ufer des Schlitzes zuteilt. Die gleiche Überlegung ist aber auch für die Annäherung an x aus der unteren Halbebene richtig, so daß (7) auch gültig ist, wenn man dem arcsin die Werte des unteren Ufers zuschreibt. Ebenso schließt man im Falle $x < -2$. Damit ist alles bewiesen.

Setzt man in (7) speziell $x = i$, so ergibt sich das Resultat von Hjortnaes:

$$L_3(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 10 \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{Arsh}^2 u}{u}\, du$$

$$= \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 (2\,n)!}\,(n!)^2.$$

Differentiation von (7) nach x ergibt, nach einer Umformung des auftretenden Integrals,

$$L_2(-x^2) = -3 \arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\,(1 - x^2) \int_0^{\arcsin(x/2)} \frac{u}{1 + x^2 - 2\,x \sin u}\, du, \tag{8}$$

woraus, mit $x = 1$, das bekannte Ergebnis

$$L_2(-1) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -3 \arcsin^2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{12}$$

folgt. Auch der Punkt $x = i$ in (8) führt zu einer bekannten Relation zwischen bestimmten Werten des L_2.

4.

Zum Abschluß soll noch eine interessante Folgerung aus den Überlegungen zum Beweis von Satz 2 gezogen werden. Dort wurde gezeigt, daß (7) auch für $x > 2$ richtig ist, so daß das Integral in (7) in diesem Bereich, wie $L_3(-x^2)$, reelle Werte hat. Für $u \leqq 1$ ist $\arcsin u$ reellwertig, für $u > 1$ gilt jedoch $\arcsin u = \frac{\pi}{2} \pm i \operatorname{Arch} u$, und wir können für $x > 2$ schließen

$$0 = \operatorname{Im} L_3(-x^2) = -8\pi \int_1^{x/2} \frac{1 + x^2 - \frac{5}{2} u x}{1 + x^2 - 2 u x} \frac{\operatorname{Arch} u}{u} \, du.$$

Diese merkwürdige Aussage führte zur direkten Untersuchung des obigen Integrals, mit folgendem Ergebnis:

Satz 3. *Es ist*

$$F(x) = \int_1^{x/2} \frac{1 + x^2 - \frac{5}{2} u x}{1 + x^2 - 2 u x} \frac{\arccos u}{u} \, du$$

$$= \begin{cases} 0 & \operatorname{Re} x > 1, \quad x = 1 \\ \frac{\pi}{2} \ln(x) & \operatorname{Re} x < 1, \quad x \notin [-\infty, 0] \\ \textit{divergent} & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir führen den Beweis zunächst für $0 < x \leqq 2$. Für

$$0 < v \leqq 2, \quad v \neq 1$$

haben wir

$$\int_{(1-v)^2}^{1} \frac{dt}{t\sqrt{-t^2 + 2t(v^2+1) - (v^2-1)^2}} = \frac{\arccos\left[\frac{v}{2}(v^2-3)\right]}{|v^2-1|},$$

wobei der Hauptwert des arccos zu wählen ist. Substituiert man in diesem Integral $t = 1 + x^2 - 2uv$, integriert einmal partiell und beachtet die für die Hauptwerte des arccos gültige Relation

$$\frac{\arccos\left[\frac{v}{2}(v^2-3)\right]}{|v^2-1|} = \frac{3\arccos\frac{v}{2}}{v^2-1} - \frac{2\pi\,\varepsilon(v)}{v^2-1}$$

mit

$$\varepsilon(v) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 < v < 1 \\ 0 & \text{für} \quad 1 < v \leqq 2 \end{cases}, \quad \text{so erhält man}$$

$$-\frac{1}{2}(v^2 - 1)\int_{v/2}^{1} \frac{\arccos u}{(1 + v^2 - 2uv)^2}\, du$$

$$+\frac{1}{v}\left(1 - \frac{v^2}{4}\right)\arccos\frac{v}{2} = \frac{\pi\,\varepsilon(v)}{2v}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist aber gleich $F'(v)$, und man hat

$$\int_2^x F'(v)\,dv = \int_2^x \frac{\pi\,\varepsilon(v)}{2v}\,dv = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x > 1 \\ \frac{\pi}{2}\ln(x) & \text{für} \quad 0 < x < 1 \end{cases},$$

also $F(x) = 0$ für $1 < x \leqq 2$. Für $0 < x < 1$ erhält man

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x) + \lim_{\beta \to 1-0} F(\beta).$$

Wir haben nun nur noch zu zeigen, daß $F(x)$ in $x = 1$ stetig ist. Es ist

$$F(x) = \int_1^{x/2} \frac{\arccos u}{u}\,du - \frac{x}{2}\int_1^{x/2} \frac{\arccos u}{1 + x^2 - 2ux}\,du.$$

Der erste Summand ist in $x = 1$ stetig, ebenso die Funktion

$$\int_0^{x/2} \frac{\arccos u}{1 + x^2 - 2ux}\,du,$$

so daß es genügt, die rechtsseitige Stetigkeit von

$$G(\alpha) = \int_0^1 \frac{\arccos u}{\alpha - u}\,du \qquad \left(\alpha = \frac{1 + x^2}{2x}\right)$$

in $\alpha = 1$ zu beweisen. $G(1)$ existiert, denn es ist in $0 \leqq u \leqq 1$

$$\frac{\arccos u}{\sqrt{1 - u}} \leqq M < \infty, \quad \text{da} \quad \lim_{u \to 1} \frac{\arccos u}{\sqrt{1 - u}} = \sqrt{2}.$$

Damit ist

$$|G(1)| \leqq M \int_0^1 (1 - u)^{-1/2}\,du = 2M.$$

Für $\alpha > 1$ ist dann

$$|G(\alpha) - G(1)| \leqq M(\alpha - 1) \int_0^1 \frac{1}{(\alpha - u)\sqrt{1-u}}\, du$$
$$= 2\, M \sqrt{\alpha - 1}\, \operatorname{arctg}\, [(\alpha - 1)^{-1/2}],$$

woraus mit $\alpha \to 1$ die Stetigkeit folgt. Wie schon früher, erkennt man, daß die Formel in Gebiete holomorph fortgesetzt werden kann, in denen der Integrand auf dem ganzen Integrationsweg keine Unstetigkeit besitzt. Wie man leicht nachrechnet, tritt eine solche Unstetigkeit nur auf, wenn $\operatorname{Re} x = 1$ ist, oder wenn $x \in [-\infty, 0]$ ist. In diesen Fällen, außer in $x = 1$, divergiert das Integral. Damit ist alles gezeigt.

Setzt man in Satz 3 $x = i$, so wird

$$\int_1^{i/2} \frac{\arccos u}{u}\, du = i \frac{\pi^2}{5},$$

ein Ergebnis, das ebenfalls eng mit einem speziellen bekannten Wert des Dilogarithmus zusammenhängt. Setzt man für den Integranden die Reihenentwicklung ein, so ergeben sich die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{(2\,n+1)^2\, 4^n} = \frac{\pi^2}{10},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2\,n}{n} \frac{1}{(2\,n+1)^2\, 4^n} = \frac{\pi}{2} \ln(2).$$

Literatur

[1] K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964.

[2] M. Hjortnæs, Überführung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$ in ein bestimmtes Integral. 12. Skand. Math. Kongr. Lund, 1953, S. 211–213.

[3] L. Lewin, Dilogarithms and associated Functions. London 1958.