Eine Verallgemeinerung der LEIBNIZschen Produktregel

Von STEPHAN RUSCHEWEYH in Bonn [1])

(Eingegangen am 7. 6. 1972)

In dieser Arbeit wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *Seien $u(x)$, $v(x)$ und $f(x)$ in einem Intervall J der reellen Achse n-mal stetig differenzierbare Funktionen, $f(x) \neq 0$ in J. Dann gilt in J:*

$$(1) \qquad (u\,v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (v' f^{-k})^{(k-1)} (u f^k)^{(n-k)},$$

wobei $(v')^{(-1)} = v$ gesetzt ist.

Für $f(x) = 1$ geht (1) in die LEIBNIZsche Produktregel über. Wir geben zwei Beweise für (1) an: einen, der auf dem Residuenkalkül beruht, und einen rein algebraischen, der die Äquivalenz von (1) mit der Entwicklung von BÜRMANN-LAGRANGE zeigt.

Als Anwendung von (1) beweisen wir anschließend ein Multiplikationstheorem für eine Klasse von Lösungen der Differentialgleichung von PESCHL und BAUER

$$(2) \qquad (1 + \varepsilon z \bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n (n+1) w = 0, \quad n \in \boldsymbol{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

das wiederum eine Verallgemeinerung einer bekannten Rekursionsformel von HERMITE und SCHLÄFLI für die LEGENDRE-Funktionen darstellt.

I) Beweis von Satz 1. Zunächst eine allgemeine Bemerkung. Es genügt offenbar, (1) im Punkte $x = 0$ zu beweisen. Wenn wir für eine der Funktionen u, v, f eine Entwicklung $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + R_{n+1}(x)$ mit $R_{n+1}^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$ ansetzen, so geht in (1) nur die Koeffizientenfolge a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, ein, nicht jedoch R_{n+1}. Es genügt also, (1) für Polynome vom Grade n zu beweisen, oder, was allgemeiner ist, für in $x = 0$ holomorphe Funktionen u, v, f.

---

[1]) Unterstützung bei der Abfassung wurde vom Sonderforschungsbereich 40 (Theoretische Mathematik) gewährt.

Beweis mit Residuenkalkül: Da (1) für $f = 1$ richtig ist, genügt es zu zeigen, daß in $x = 0$ stets

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} [(v' f^{-k})^{(k-1)} (u f^k)^{(n-k)} - (v')^{k-1} u^{(n-k)}] = 0$$

ist. Formt man dieses mit der CAUCHYschen Integralformel um und setzt

$$K(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-k)!} x^{-k} \frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}} \left[u(y)\left(\frac{f^k(y)}{f^k(x)} - 1\right)\right]\Bigg|_{y=0},$$

so ist zu zeigen, daß für genügend kleines r

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{|x|=r} v'(x) K(x)\, dx = 0$$

ist, für jede in $|x| \leqq r$ holomorphe Funktion $v'(x)$. Das ist sicher genau dann richtig, wenn $K(x)$ in $x = 0$ holomorph ist. Das letztere werden wir im folgenden beweisen. Mit

$$F_s(x) = \sum_{k=1}^{s} \frac{x^{-k}}{k(s-k)!} \frac{\partial^{s-k}}{\partial y^{s-k}} \left[\frac{f^k(y)}{f^k(x)} - 1\right]\Bigg|_{y=0}$$

wird

$$K(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u^{(j)}(0)}{j!} F_{n-j}(x).$$

Wir setzen jetzt $g(x) = x f(x)$. In einer punktierten Umgebung von $x = 0$ ist dann $g(x) \neq 0$. Für die folgenden Umformungen wählen wir ein beliebiges, aber festes x aus dieser Umgebung. Aus der CAUCHYschen Integralformel erhält man

$$F_s(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|y|=r} \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k} \frac{g^k(y)}{g^k(x)} \frac{dy}{y^{s+1}} - \frac{1}{s x^s}.$$

Es ist $g(0) = 0$, also $\dfrac{g^k(y)}{y^{s+1}}$ holomorph in $y = 0$ für $k \geqq s + 1$. Wir wählen den Radius r des Integrationsweges in $0 < r < |x|$ so klein, daß auf $|y| = r$ stets $\left|\dfrac{g(y)}{g(x)}\right| < 1$ gilt. Ohne den Wert des Integrals zu ändern, können wir die Summe im Integranden nun bis Unendlich laufen lassen. Beachtet man noch, daß für diese x und r

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|y|=r} \ln(x - y) \frac{dy}{y^{s+1}} = -\frac{1}{s x^s}$$

ist, so folgt

$$F_s(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|y|=r} \ln\left[\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right]\frac{dy}{y^{s+1}}$$
$$= -\frac{1}{s!}\frac{\partial^s}{\partial y^s}\ln\left[\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right]\Bigg|_{y=0}.$$

Da $g'(0) = f(0) \neq 0$ ist, läßt sich $\ln\left[\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}\right]$ in einer Umgebung des Ursprungs in eine Potenzreihe in den Variablen x, y entwickeln. Damit ist aber $F_s(x)$ in $x = 0$ holomorph, und dasselbe gilt für $K(x)$. Q. e. d.

Beweis mit Hilfe der Formel von Bürmann-Lagrange. Wenn $v(x)$, $g(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ holomorph sind, $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$, so gilt in einer Umgebung von $w = 0$

$$v\left(\overset{-1}{g}(w)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[v'(x)\left(\frac{x}{g(x)}\right)^k\right]^{(k-1)}\Bigg|_{x=0}\frac{w^k}{k!},$$

wobei $\overset{-1}{g}$ die Umkehrfunktion von g bedeutet (z. B. [1], S. 173). Mit $w = g(t)$ und $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ erhält man

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[v'(x)f^{-k}(x)\right]^{(k-1)}\Big|_{x=0}(tf(t))^k.$$

Andererseits folgt aus der Taylor-Entwicklung der Funktionen

$$u(t)f^k(t), \qquad k = 0, 1, \ldots$$
$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left[u(x)f^k(x)\right]^{(j)}\Big|_{x=0} t^j f^{-k}(t).$$

Also wird, wenn man in jedem Summanden der Reihe für $v(t)$ eine andere Darstellung von $u(t)$ multipliziert,

$$u(t)\,v(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{v'(x)}{f^k(x)}\right]^{(k-1)}\Bigg|_{x=0}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left[u(x)f^k(x)\right]^{(j)}\Big|_{x=0} t^{k+j}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{v'(x)}{f^k(x)}\right)^{(k-1)}\left(u(x)f^k(x)\right)^{(n-k)}\right]\Bigg|_{x=0} t^n.$$

Vergleicht man diese Entwicklung mit der Taylor-Entwicklung von $u(t)\,v(t)$, so ergibt sich die Behauptung. Q. e. d.

Man beachte, daß in dem letzten Beweis alle Schritte umkehrbar sind, so daß (1) und die Formel von Bürmann-Lagrange äquivalent sind.

II) Ein Multiplikationstheorem für gewisse Lösungen von (2). Sei

$$E_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{-\varepsilon \bar{z}}{1+\varepsilon z \bar{z}}\right)^k \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}},$$

$$n \in \boldsymbol{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

der BAUERsche Differentialoperator und G ein in der komplexen Ebene ($\varepsilon = 1$) bzw. in der offenen Einheitskreisscheibe ($\varepsilon = -1$) gelegenes, einfach zusammenhängendes und endliches Gebiet. Sei $g(z)$ eine in G holomorphe Funktion. Nach BAUER [2] ist dann $w = E_n g := (E_n g)(z)$ eine in G definierte Lösung von (2). Für diese Lösungen gilt:

Satz 2. *Seien $g(z)$, $h(z)$ in G holomorph. Dann gilt*:

$$E_n(z^n g\, h) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k\,(z^k g)\, E_{n-k-1}(z^{n-k} h'), \tag{3}$$

wobei $E_{-1} h' = h$ gesetzt ist.

Beweis. Wie man leicht sieht, gilt stets

$$E_n g = (1+\varepsilon z \bar{z})^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} [g(z)\,(1+\varepsilon z \bar{z})^{-n-1}].$$

(3) ergibt sich nun sofort aus (1), wenn man dort k durch $n-k$ ersetzt und

$$u(z) = \frac{z^n}{(1+\varepsilon z \bar{z})^{n+1}}, \quad v(z) = h(z), \quad f(z) = \frac{1+\varepsilon z \bar{z}}{z}$$

einsetzt. Die auftretenden Ableitungen werden als partielle Ableitungen nach z interpretiert. (3) ist auch in $z = 0$ richtig, da alle beteiligten Funktionen stetig sind. Q. e. d.

BAUER [2] zeigte auch, daß stets

$$E_n\left(\frac{z^n}{n!}\right) = P_n(X), \quad \operatorname{Re} E_n\left(\frac{z^n \ln z}{n!}\right) = -Q_n(X), \tag{4}$$

mit $X = \dfrac{1-\varepsilon z \bar{z}}{1+\varepsilon z \bar{z}}$ gilt, wobei P_n, Q_n die LEGENDRE-Funktionen erster bzw. zweiter Art bezeichnen. Setzt man nun in (3) speziell

$$g(z) = \frac{1}{n!}, \quad h(z) = \ln z,$$

und bildet von beiden Seiten den Realteil, so ergibt sich mit den Bezeichnungen von (4)

$$Q_n(X) = -P_n(X) \ln |z| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} P_k(X)\, P_{n-k-1}(X).$$

Diese Rekursionsformel für LEGENDRE-Funktionen findet sich bereits bei HERMITE und SCHLÄFLI (siehe z. B. [3], S. 333). Eine andere Anwendung von (3) findet sich in [4].

Literatur

[1] E. PESCHL, Funktionentheorie I. Mannheim 1968.

[2] K. W. BAUER, Über die Lösungen der elliptischen Differentialgleichung

$$(1 + \lambda z \bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \lambda w = 0.$$

J. reine angew. Math. **221**, Teil I; 48–84 (1966).

[3] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, Modern Analysis. Cambridge 1927.

[4] ST. RUSCHEWEYH, Geometrische Eigenschaften gewisser Lösungen der Differentialgleichung von Peschl und Bauer. Erscheint demnächst im J. reine angew. Math.

Mathematisches Institut der Universität Bonn
53 *Bonn, Wegelerstr.* 10