Math. Z. 134, 215–219 (1973)

Eine Invarianzeigenschaft der Basilevič-Funktionen

Stephan Ruscheweyh

I. Einleitung

Seien P, S^* bzw. K die Familien der in $EK=\{|z|<1\}$ holomorphen Funktionen $f(z)$, die dort positiven Realteil besitzen (P), schlicht und sternförmig bezüglich des Ursprungs sind (S^*) bzw. EK schlicht auf ein konvexes Gebiet abbilden. Die Funktionen $f(z)$ aus S^*, K seien außerdem durch $f(0)=0$ normiert. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha>0$, $h\in P$, $g\in S^*$ sei

$$F(z)=\left[\int_0^z h(t)\, g^{\alpha}(t)\, t^{i\beta-1}\, dt\right]^{\frac{1}{\alpha+i\beta}}. \tag{1.1}$$

Basilevič [1] zeigte, daß $F(z)$ in EK eindeutig und schlicht ist (vgl. auch Pommerenke [5], Sheil-Small [8]). Wir nennen $F(z)$ *eine Basilevič-Funktion* und schreiben $F\in B(\alpha, \beta)$. Insbesondere ist jede spiralförmige und jede fast-konvexe ($\alpha=1$, $\beta=0$) Funktion eine Basilevič-Funktion.

Singh [9] zeigte kürzlich, in Verallgemeinerung früherer Resultate von Libera [4] und Bernardi [2], daß für $F\in B(\alpha,\beta)$ die Funktion

$$G(z)=\left[z^{-c}\int_0^z t^{c-1}\, F^{\alpha+i\beta}(t)\, dt\right]^{\frac{1}{\alpha+i\beta}} \tag{1.2}$$

wiederum in $B(\alpha,\beta)$ liegt, sofern $\alpha, c\in\mathbb{N}$, $\beta=0$ ist. Ebenso zeigte er, daß für $\alpha, c\in\mathbb{N}$ und $f\in S^*$ auch

$$g(z)=\left[z^{-c}\int_0^z t^{c-1} f^{\alpha}(t)\, dt\right]^{1/\alpha}\in S^* \tag{1.3}$$

gilt. Setzt man

$$h_{\gamma}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k+\gamma},$$

so lassen sich die Formeln (1.2), (1.3) mit Hilfe des Hadamard-Produktes auch folgendermaßen schreiben:

$$F\in B(\alpha,\beta) \Rightarrow G=z\left[\left(\frac{F}{z}\right)^{\alpha+i\beta} * \frac{h_{\alpha+i\beta+c}(z)}{z}\right]^{\frac{1}{\alpha+i\beta}}\in B(\alpha,\beta), \tag{1.4}$$

$$f\in S^* \Rightarrow g=z\left[\left(\frac{f}{z}\right)^{\alpha} * \frac{h_{\alpha+c}(z)}{z}\right]^{1/\alpha}\in S^* \tag{1.5}$$

für die angegebenen Werte von α, β, c. Es ist leicht einzusehen, daß für $\operatorname{Re}\gamma \geqq 0$ $h_\gamma \in K$ gilt, und in Anbetracht der Resultate in [7] liegt die Frage nahe, ob man in (1.4), (1.5) h_γ durch eine beliebige Funktion aus K ersetzen kann, und welche Werte von α, β dabei möglich sind. Wir werden zeigen, daß diese Vermutung jedenfalls für $0<\alpha \leqq 1$ zutrifft, während sie für $\alpha > \frac{3}{2}$ falsch ist. Jedoch können wir (1.4), (1.5) selbst auf beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, und $c \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} c \geqq 0$ ausdehnen.

II. Die Faltung der Basilevič-Funktionen

Satz 2.1. *Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0<\alpha \leqq 1$, und $F \in B(\alpha, \beta)$. Dann ist für jedes $h \in K$*

$$G(z) = z\left[\left(\frac{F}{z}\right)^{\alpha+i\beta} * \frac{h}{z}\right]^{\frac{1}{\alpha+i\beta}} \in B(\alpha,\beta). \tag{2.1}$$

Satz 2.2. *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $0<\alpha \leqq 1$, und $f \in S^*$. Dann ist für jedes $h \in K$*

$$g(z) = z\left[\left(\frac{f}{z}\right)^{\alpha} * \frac{h}{z}\right]^{1/\alpha} \in S^*. \tag{2.2}$$

Man kann vermuten, daß die in den Sätzen genannte obere Schranke für α scharf ist. Auf jeden Fall ist die Gültigkeit beider Sätze nicht über $\alpha = \frac{3}{2}$ hinaus fortsetzbar. Es ist nämlich $(f/z)^\alpha * (h/z) \neq 0$ für alle $z \in EK$, $h \in K$ höchstens dann, wenn

$$q(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^\alpha dt$$

schlicht in EK ist (vgl. [6]). Es ist klar, daß dieses für die Koebe-Funktion und $\alpha > \frac{3}{2}$ nicht richtig ist.

Zum Beweis beider Sätze verwenden wir das folgende Resultat aus [7].

Lemma 2.3. *Sei $h \in K$, $f \in S^*$, $H \in P$. Dann ist*

$$\frac{h * fH}{h * f} \in P.$$

Beweis von Satz 2.2: Aus (2.2) ergibt sich

$$\frac{z g'}{g} = \frac{h * z\left(\frac{f}{z}\right)^\alpha \frac{z f'}{f}}{h * z\left(\frac{f}{z}\right)^\alpha}.$$

Da für $0<\alpha \leqq 1$ und $f \in S^*$ auch $z(f/z)^\alpha \in S^*$ gilt, folgt aus Lemma 2.3 die Behauptung.

Beweis von Satz 2.1: Sei für $f \in S^*$

$$\frac{z F' F^{\alpha+i\beta-1}}{z^{i\beta} f^{\alpha}} \in P,$$

und $g \in S^*$ gemäß (2.2) gebildet. Dann ist

$$\frac{z G' G^{\alpha+i\beta-1}}{z^{i\beta} g^{\alpha}} = \frac{h * z \left(\frac{f}{z}\right)^{\alpha} \frac{z F' F^{\alpha+i\beta-1}}{z^{i\beta} f^{\alpha}}}{h * z \left(\frac{f}{z}\right)^{\alpha}}.$$

und Lemma 2.3 liefert das behauptete Ergebnis.

III. Verallgemeinerung des Resultats von Singh

Satz 3.1. *Seien* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, *und* $c \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} c \geqq 0$. *Sei* $F \in B(\alpha, \beta)$. *Dann ist auch*

$$G(z) = \left[z^{-c} \int_0^z t^{c-1} F^{\alpha+i\beta}(t)\, dt\right]^{\frac{1}{\alpha+i\beta}} \in B(\alpha, \beta).$$

Satz 3.2. *Sei* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, *und* $c \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} c \geqq 0$. *Sei* $f \in S^*$. *Dann ist auch*

$$g(z) = \left[z^{-c} \int_0^z t^{c-1} f^{\alpha}(t)\, dt\right]^{1/\alpha} \in S^*.$$

Lemma 3.3 ([3]). *Sei* $w(z)$ *holomorph in* $|z| < R$, $w(0) = 0$. z_0 *genüge den Bedingungen* $|z_0| < R$ *und* $|w(z)| \leqq |w(z_0)|$ *für* $|z| \leqq |z_0|$. *Dann gilt*

$$z_0 w'(z_0)/w(z_0) \geqq 1.$$

Beweis von Satz 3.2: Sei

$$R = \sup\{r \mid g(z) \neq 0 \text{ in } 0 < |z| < r\}.$$

Wegen $g(0) = 0$ ist $R > 0$, und es ist ein Teil unserer Aufgabe zu beweisen, daß $R \geqq 1$ gilt. Wegen des Satzes von Koebe ist dieses sicher richtig, wenn gezeigt ist, daß $g(z)$ in $|z| < R$ (falls $R < 1$ wäre) schlicht ist.

In $|z| < R$ ist $g(z)$ holomorph und eindeutig, $g'(0) \neq 0$. Mit $h(z) = z g'(z)/g(z)$ ergibt sich

$$h(z) + \frac{z h'(z)}{c + \alpha h(z)} = \frac{z f'(z)}{f(z)}.$$

Unser Satz ist also bewiesen, wenn wir zeigen können, daß aus

$$\operatorname{Re}\left[h(z) + \frac{z h'(z)}{c + \alpha h(z)}\right] > 0, \qquad |z| < R, \tag{3.1}$$

$\operatorname{Re} h(z) > 0$ in $|z| < R$ folgt. Es ist $h(0) = 1$, und wir setzen

$$h(z) = (1 + w(z))/(1 - w(z)), \qquad w(0) = 0.$$

Wir haben $|w(z)| < 1$ in $|z| < R$ zu beweisen. Wenn das nicht der Fall wäre, so gäbe es ein z_0 mit $|z_0| < R$, $|w(z)| \leqq |w(z_0)| = 1$ für $|z| \leqq |z_0|$, $w(z_0) \neq 1$ und $z_0 w'(z_0)/w(z_0) = \delta \geqq 1$. Damit wird

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left[h(z_0) + \frac{z_0 h'(z_0)}{c + \alpha h(z_0)}\right] &= 2\delta \operatorname{Re}\left[\frac{w(z_0)}{(1 - w(z_0))^2} \frac{1}{c + \alpha h(z_0)}\right] \\ &= -2\delta\mu \operatorname{Re}(c + \alpha h(z_0))^{-1} \\ &\leqq 0,\end{aligned}$$

im Widerspruch zu (3.1). Hierbei ist $\mu = -w(z_0)/(1 - w(z_0))^2 \geqq \frac{1}{4}$. Damit ist $\operatorname{Re} h(z) > 0$ in $|z| < R$, also $g(z)$ dort sternförmig und schlicht. Wegen der eingangs gemachten Bemerkung ist damit alles bewiesen.

Beweis von Satz 3.1: Sei für die Funktion $G(z)$ ein R wie im vorangegangenen Beweis erklärt. Für ein $f \in S^*$ ist

$$\frac{zF' F^{\alpha + i\beta - 1}}{z^{i\beta} f^\alpha} \in P. \tag{3.2}$$

Nach Satz 3.2 ist

$$g(z) = \left[z^{-c - i\beta} \int_0^z t^{c + i\beta - 1} f^\alpha(t)\, dt\right]^{1/\alpha} \in S^*. \tag{3.3}$$

Wir setzen

$$h(z) = \frac{zG' G^{\alpha + i\beta - 1}}{z^{i\beta} g^\alpha}.$$

Gelingt es zu zeigen, daß $\operatorname{Re} h(z) > 0$ in $|z| < R$ gilt, so ist der Beweis offenbar wiederum geführt. Eine leichte Rechnung ergibt

$$g^\alpha z^{i\beta} \left\{ z h' + h \left[\alpha \frac{z g'}{g} + c + i\beta\right]\right\} = zF' F^{\alpha + i\beta - 1},$$

und aus (3.3) folgt

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\alpha = \alpha \frac{z g'}{g} + c + i\beta.$$

Aus (3.2) können wir nun schließen, daß

$$\frac{z h'}{\alpha \dfrac{z g'}{g} + c + i\beta} + h \in P$$

gilt, woraus wie im Beweis des vorigen Satzes $\operatorname{Re} h(z) > 0$ in $|z| < R$ und damit die Behauptung folgt.

Literatur

1. Basilevič, I.E.: Über einen Fall der Integrierbarkeit in der Quadratur der Gleichung von Löwner-Kufarev. Mat. Sbornik, n. Ser. **37**, 471–476 (1955)
2. Bernardi, S.D.: Convex and starlike univalent functions. Trans. Amer. math. Soc. **135**, 429–446 (1969)
3. Jack, I.S.: Functions starlike and convex of order α. J. London math. Soc., II. Ser. **3**, 469–474 (1971)
4. Libera, R.J.: Some classes of regular univalent functions. Proc. Amer. math. Soc. **16**, 755–758 (1965)
5. Pommerenke, Ch.: Über die Subordination analytischer Funktionen. J. reine angew. Math. **218**, 159–173 (1965)
6. Ruscheweyh, St.: Über die Faltung schlichter Funktionen. Math. Z. **128**, 85–92 (1972)
7. Ruscheweyh, St., Sheil-Small, T.: Hadamard products of schlicht functions and the Pólya-Schoenberg conjecture. Commentarii math. Helvet. **48**, 119–135 (1973)
8. Sheil-Small, T.: On Bazilevič functions. Quart. J. Math. Oxford, II. Ser. **23**, 135–142 (1972)
9. Singh, R.: On Bazilevič functions. Proc. Amer. math. Soc. **38**, 261–271 (1973)

Stephan Ruscheweyh
Abteilung Mathematik der Universität
D-4600 Dortmund-Hombruch
Postfach 500
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 26. Juli 1973)