Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe.

Bernhard Riemann

[Annalen der Physik und Chemie. Bd. 95. 1855.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe.

Bernhard Riemann

[Annalen der Physik und Chemie. Bd. 95. 1855.]

Die *Nobili*'schen Farbenringe bilden ein schätzbares Mittel, die Gesetze der Stromverzweigung in einem durch Zersetzung leitenden Körper experimentell zu studiren. Die Erzeugungsweise dieser Ringe ist folgende. Man übergiesst eine Platte von Platin, vergoldetem Silber oder Neusilber mit einer Auflösung von Bleioxyd in concentrirter Kalilauge und lässt den Strom einer starken galvanischen Batterie durch die Spitze eines feinen in eine Glasröhre eingeschmolzenen Platindrahts in die Flüssigkeitsschicht ein- und durch die Platte austreten. Das Anion, Bleisuperoxyd nach *Beetz*, lagert sich dann auf der Metallplatte in einer zarten durchsichtigen Schicht ab, welche je nach der Entfernung von Eintrittspunkte des Stroms verschiedene Dicke besitzt, so dass die Platte nach Entfernung der Flüssigkeit *Newton*'sche Farbenringe zeigt. Aus diesen Farbenringen lässt sich dann die relative Dicke der Schicht in verschiedenen Entfernungen bestimmen und hieraus mittelst des *Faraday*'schen Gesetzes, nach welchem die Menge der abgeschiedenen Substanz der durchgegangenen Electricitätsmenge allenthalben proportional sein muss, die Stromvertheilung beim Austritt aus der Flüssigkeit ableiten.

Der erste Versuch, die Stromvertheilung durch Rechnung zu bestimmen und das gefundene Resultat mit der Erfahrung zu vergleichen, ist von *E. Becquerel* gemacht worden. Derselbe hat vorausgesetzt, dass die Ausdehnung der Flüssigkeitsschicht gegen ihre Dicke als unendlich gross betrachtet werden dürfe, der Strom durch einen Punkt ihrer Oberfläche eintrete und sich nach den *Ohm*'schen Gesetzen in derselben ausbreite. Er glaubt nun bei diesen Voraussetzungen ohne merklichen Fehler die Strömungscurven als gerade Linien betrachten zu können und leitet aus dieser Annahme das Gesetz ab, dass die Dicke der niedergeschlagenen Schicht dem Abstande vom Eintrittspunkte umgekehrt proportional sein müsste, welches Gesetz er experimentell bestätigt habe.

Herr *Du-Bois-Reymond* hat dagegen in einem vor der physikalischen Gesellschaft zu Berlin gehaltenen Vortrage gezeigt, dass bei Voraussetzung gerader Strömungslinien die Dicke der in ihrem Endpunkte abgeschiedenen Substanz vielmehr dem Cubus ihrer Länge umgekehrt proportional sich ergiebt und dadurch Herrn *Beetz* zu einer Reihe von dem Anschein nach bestätigenden Versuchen veranlasst, welche in Poggendorff's Annalen Bd. 71, S. 71 beschrieben sind und viel Vertrauen erwecken.

Die genaue Rechnung indessen lehrt, dass die Voraussetzung gerader Strömungslinien unzulässig ist und ein ganz falsches Resultat liefert. Allerdings sind die Strömungslinien, wenigstens bei grösserer Entfernung ihres Austrittspunktes (da sie zwischen zwei sehr nahen Parallel-Linien liegen und höchstens einen Wendepunkt besitzen), in dem mittleren Theile ihres Laufes in beträchtlicher Ausdehnung sehr wenig gekrümmt; hieraus aber darf man keineswegs schliessen, dass sie ohne merklichen Fehler durch gerade von ihrem Eintrittspunkte nach ihrem Austrittspunkte gehende Linien ersetzt werden können. Ich werde zunächst die bei genauer Rechnung aus den Voraussetzungen der Herren *E. Becquerel* und *Du-Bois-Reymond* fliessenden Folgerungen entwickeln und schliesslich auf die Versuche des Herrn *Beetz* zurückzukommen mir erlauben.

Ich nehme an, dass der Eintritt des Stromes in die durch zwei horizontale Ebenen begrenzte Flüssigkeitsschicht in einem Punkte stattfinde, und bezeichne für einen Punkt derselben den Horizontalabstand von Einströmungspunkt durch r, die Höhe über der unteren Grenzfläche durch z, die Erhebung seiner Spannung über die Spannung an der oberen Seite dieser Grenzfläche durch u. Ferner sei die Stärke des ganzen Stromes S, der specifische Leitungswiderstand der Flüssigkeit w, im Einströmungspunkt $z = \alpha$, an der Oberfläche $z = \beta$. Es muss nun u als Function von r und z bestimmt werden; die Stromintensität im Punkte $(r, 0)$, welcher nach dem *Faraday*'schen Gesetz die gesuchte Dicke der dort niedergeschlagenen Schicht proportional sein muss, ist dann gleich dem Werthe von $\frac{1}{w}\frac{\partial u}{\partial z}$ in diesem Punkte.

Wird zunächt vorausgesetzt, dass die Ausdehnung der Flüssigkeitsschicht gegen ihre Dicke als unendlich gross betrachtet werden dürfe, so sind die Bedingungen zur Bestimmung von u

(1) für $-\infty < r < \infty$, $0 < z < \beta$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

(2) für $-\infty < r < \infty$, $z = 0$, $\qquad u = 0;$

(3) für $-\infty < r < \infty$, $z = \beta$, $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0;$

(4) für $r = \pm\infty$, $0 < z < \beta$, $\qquad u$ endlich;

(5) für $r = 0$, $z = \alpha$,

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{wS}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{rr + (z-\alpha)^2}} \\ \text{oder } &= \frac{wS}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{rr + (z-\alpha)^2}} \end{aligned}\right\} + \text{ einer}$$

stetigen Function von r, z, je nachdem der Einströmungspunkt im Innern oder in der Oberfläche liegt.

Diesen Bedingungen genügt

$$u = \frac{sW}{4\pi}\sum_{-\infty,\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta + \alpha)^2}}\right)$$

oder wenn man zur Vereinfachung $S = \dfrac{4\pi}{w}$ annimmt:

$$u = \sum_{-\infty,\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta + \alpha)^2}}\right).$$

Setzt man

$$u = a_1 \sin\frac{\pi z}{2\beta} + a_2 \sin 2\frac{\pi z}{2\beta} + a_3 \sin 3\frac{\pi z}{2\beta} + \cdots,$$

so wird für ein gerades n der Coefficient $a_n = 0$ und für ein ungerades

$$\begin{aligned} \beta a_n \;&=\; \int_0^{2\beta} \sin n\frac{\pi t}{2\beta}\sum_{-\infty,\infty}(-1)^m\Big(\frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta - \alpha)^2}} \\ &\qquad - \frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta + \alpha)^2}}\Big) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sin n\frac{\pi}{2\beta}(t+\alpha) - \sin n\frac{\pi}{2\beta}(t-\alpha)\right)\frac{dt}{\sqrt{rr + tt}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sin n\frac{\pi\alpha}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\cos n\frac{\pi t}{2\beta}\frac{dt}{\sqrt{rr+tt}} \\
&= 2\sin n\frac{\pi\alpha}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{n\frac{\pi}{2\beta}ti}\,dt}{\sqrt{rr+tt}}.
\end{aligned}
$$

In letzterem Integral kann statt $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ auch $2\int\limits_{ri}^{\infty i}$ geschrieben werden. Führt man für t als Veränderliche tri ein, so erhält man

$$
a_n = \frac{4\sin n\dfrac{\pi}{2\beta}\alpha}{\beta}\int_1^{\infty}\frac{e^{-n\frac{\pi}{2\beta}rt}\,dt}{\sqrt{tt-1}},
$$

also

$$
u = \sum \sin n\frac{\pi}{2\beta}z\,\frac{4\sin n\dfrac{\pi}{2\beta}\alpha}{\beta}\int_1^{\infty}\frac{e^{-n\frac{\pi}{2\beta}rt}\,dt}{\sqrt{tt-1}},
$$

über all positiven ungeraden Werthe von n ausgedehnt.

Nimmt man an, dass die Flüssigkeit bei $r = c$ begrenzt sei und zwar beispielshalber durch einen Nichtleiter, so muss für $r = c$ $\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$ werden und also zu dem oben erhaltenen Werth von u, der durch u' bezeichnet werden möge, noch eine Function u'' hinzufügt werden, welche folgenden Bedingungen genügt

(1) für $-c < r < c$, $0 < z < \beta$

$$
\frac{\partial^2 u''}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u''}{\partial r} + \frac{\partial^2 u''}{\partial z^2} = 0;
$$

(2) für $-c < r < c$, $z = 0$, $\qquad u'' = 0;$

(3) für $-c < r < c$, $z = \beta$, $\qquad \dfrac{\partial u''}{\partial z} = 0;$

(4) für $r = \pm c$, $0 < z < \beta$, $\qquad \dfrac{\partial u''}{\partial r} = -\dfrac{\partial u'}{\partial r};$

und überall stetig ist.

Den Bedingungen (1) bis (3) zufolge muss u'' ebenfalls in der Form

$$
b_1 \sin\frac{\pi}{2\beta}z + b_3\sin 3\frac{\pi}{2\beta}z + b_5\sin 5\frac{\pi}{2\beta}z + \cdots,
$$

darstellbar sein, und zwar fliesst aus (1) für b_n die Bedingung

$$
\frac{\partial^2 b_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial b_n}{\partial r} - \frac{nn\pi\pi}{4\beta\beta}b_n = 0.
$$

Eine particuläre Lösung dieser Gleichung ist, wie schon bekannt,

$$\int_1^\infty \frac{e^{-n\frac{\pi}{2\beta}rt}\,dt}{\sqrt{tt-1}};$$

eine andere erhält man, wenn man dasselbe Integral zwischen -1 und 1 nimmt; die allgemeinste ist also, wenn c_n und γ_n Constanten bedeuten,

$$b_n = c_n \int_1^\infty \frac{e^{-n\frac{\pi}{2\beta}rt}\,dt}{\sqrt{tt-1}} + \gamma_n \int_{-1}^1 \frac{e^{-n\frac{\pi}{2\beta}rt}\,dt}{\sqrt{1-tt}}$$

oder wenn man

$$\int_1^\infty \frac{e^{-2qt}\,dt}{\sqrt{tt-1}} \text{ durch } f(q), \quad \int_{-1}^1 \frac{e^{-2qt}\,dt}{\sqrt{1-tt}} \text{ durch } \varphi(q)$$

bezeichnet:

$$b_n = c_n f\left(n\frac{\pi}{4\beta}r\right) + \gamma_n \varphi\left(n\frac{\pi}{4\beta}r\right).$$

Die Entwicklung nach steigenden Potentzen von q giebt

$$\begin{aligned} f(q) &= \sum_{0,\infty} \frac{q^{2m}}{m!m!}(\Psi(m) - \log q), \\ \varphi(q) &= \pi \sum_{0,\infty} \frac{q^{2m}}{m!m!}; \end{aligned}$$

es wird also $f(q)$ für $q = 0$ unendlich und damit u'' für $r = 0$ stetig bleibe, muss c_n sein; γ_n ergiebt sich dann aus (4) gleich

$$-\frac{4\sin n\frac{\pi}{2\beta}\alpha}{\beta}\frac{f'\left(n\frac{\pi}{4\beta}c\right)}{\varphi'\left(n\frac{\pi}{4\beta}c\right)},$$

mithin

$$u = \sum\nolimits^n \sin n\frac{\pi}{2\beta}z\,\frac{4\sin n\frac{\pi}{2\beta}\alpha}{\beta}\left\{f\left(n\frac{\pi}{4\beta}r\right) - \varphi\left(n\frac{\pi}{4\beta}r\right)\frac{f'\left(n\frac{\pi}{4\beta}c\right)}{\varphi'\left(n\frac{\pi}{4\beta}c\right)}\right\},$$

über positiven ungeraden Werthe von n ausgedehnt.

Zur Berechnung von $f(q)$ und $\varphi(q)$ können für grosse Werthe von q die halbconvergenten Reihen

$$\begin{aligned}
f(q) &= e^{-2q}\sqrt{\frac{\pi}{4q}}\sum_{m<4q+1}(-1)^m\frac{(1\,.\,3\,\ldots\,\overline{2m-1})^2}{m!(16q)^m},\\
\varphi(q) &= e^{2q}\sqrt{\frac{\pi}{4q}}\sum_{m<4q+1}(-1)^m\frac{(1\,.\,3\,\ldots\,\overline{2m-1})^2}{m!(16q)^m}
\end{aligned}$$

benutzt werden, welche indess ihren Werth nur bis auf Bruchtheile von der Ordnung der Grösse e^{-4q} geben; genügt diese Genauigkeit nicht, so ist es wohl am zweckmässigsten die Entwicklungen nach steigenden Potenzen von q anzuwenden.

Für hinreichend grosse Werthe von $\frac{r}{\beta}$ erhält man also mit Vernachlässigung von Grössen von der Ordnung der Grösse $e^{-3\frac{\pi}{2\beta}r}$

$$\begin{aligned}
u &= \sin\frac{\pi z}{2\beta}\frac{4\sin\frac{\pi\alpha}{2\beta}}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{r}}\Bigg\{e^{-\frac{\pi r}{2\beta}}\sum\frac{(1\,.\,3\,\ldots\,\overline{2m-1})^2}{m!}\left(-\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m\\
&\quad-\sum\frac{(1\,.\,3\,\ldots\,\overline{2m-1})^2}{m!}\left(\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m e^{\frac{\pi}{2\beta}(r-2c)}\\
&\quad\times\frac{\sum\frac{(1\,.\,3\,\ldots\,\overline{2m-1})^2(2m+1)}{m!(2m-1)}\left(-\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}{\sum\frac{(1\,.\,3\,\ldots\,\overline{2m-1})^2(2m+1)}{m!(2m-1)}\left(\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}\Bigg\}
\end{aligned}$$

und die Dicke der Schicht proportional $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$ oder proportional

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-\frac{\pi r}{2\beta}}}{\sqrt{r}}\sum\frac{(1\,.\,3\,\ldots\,\overline{2m-1})^2}{m!}\left(-\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m\\
&-\frac{e^{\frac{\pi}{2\beta}(r-2c)}}{\sqrt{r}}\sum\frac{(1\,.\,3\,\ldots\,\overline{2m-1})^2}{m!}\left(\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m\\
&\quad\times\frac{\sum\frac{(1\,.\,3\,\ldots\,\overline{2m-1})^2(2m+1)}{m!(2m-1)}\left(-\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}{\sum\frac{(1\,.\,3\,\ldots\,\overline{2m-1})^2(2m+1)}{m!(2m-1)}\left(\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}.
\end{aligned}$$

Dieses Resultat bleibt im Allgemeinen auch richtig, wenn statt des Einstömungspunktes eine beliebige Umdrehungsfläche als Kathode angenommen wird; denn für Werthe von r zwischen c und demjenigen Werthe, bis zu welchem die Bedingungen (1) bis (3) gültig bleiben, muss u auch dann durch eine Reihe von der Form

$$u = \sum K_n \sin n\frac{\pi z}{2\beta}\left\{f\left(n\frac{\pi r}{4\beta}\right) - \varphi\left(n\frac{\pi r}{4\beta}\right)\frac{f'\left(n\frac{\pi c}{4\beta}\right)}{\varphi'\left(n\frac{\pi c}{4\beta}\right)}\right\}$$

dargestellt werden. Eine Ausnahme würde nur eintreten, wenn $K_1 = 0$ würde.

Die von Herrn *E. Becquerel* gemachte und von Herrn *Du-Bois-Reymond* in Wesentlichen beibehaltene specielle Voraussetzung ist die, dass die Kathode ein Punkt der Oberfläche, also $\alpha = \beta$ sei; in diesem Falle ist, wie die geführte Rechnung zeigt, die Dicke der Schicht für grosse Werthe von $\frac{r}{\alpha}$ weder der Entfernung von Einströmungspunkte, wie Herr *Becquerel*, noch ihrem Cubus, wie Herr *Du-Bois-Reymond* gefunden hat, umgekehrt proportional, sondern sie nimmt mit wachsenden $\frac{r}{\alpha}$ vielmehr ab, wie eine Potenz mit dem Exponenten $\frac{r}{\alpha}$, so dass

$$\frac{\alpha \log\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0}{r}$$

sich einem festen Grenzwerthe $-\frac{\pi}{2}$ schliesslich bis zu jedem Grade nähert. Dagegen ist das Gesetz des Herrn *Du-Bois-Reymond* nicht bloss näherungsweise für grosse Werthe von $\frac{r}{\alpha}$, sondern strenge richtig, wenn $\beta = \infty$ ist, da sich alsdann

$$u = \sum_{-\infty,\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta + \alpha)^2}}\right)$$

auf

$$\frac{1}{\sqrt{rr + (z - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{rr + (z + \alpha)^2}}$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \text{ auf } \frac{2\alpha}{\sqrt{rr + \alpha\alpha}^3}$$

reducirt. Die Vermuthung aber, aus welcher derselbe dieses Resultat abgeleitet hat, dass nämlich die Strömungslinien als gerade betrachtet werden dürften, bestätigt sich keineswegs. Die Gleichung der Strömungslinien ist

$$\int \left(r \frac{\partial u}{\partial z}\, dr - r \frac{\partial u}{\partial z}\, dz \right) = v = \text{const.},$$

und zwar ist die Constante, multiplicirt mit $\frac{2\pi}{w}$, wenn man das Integral so nimmt, dass es für $r = 0$ verschwindet, gleich dem innerhalb der Umdrehungsfläche ($v = \text{const.}$) fliessenden Theile des Stromes. In unserem Falle also sind die Strömungslinien die in der Gleichung

$$v = 2 - \frac{z + \alpha}{\sqrt{rr + (z + \alpha)^2}} \pm \frac{z - \alpha}{\sqrt{rr + (z - \alpha)^2}} = \text{const.}$$

enthaltenen Linien, welche Linien für alle grösseren Werthe der const. beträchtlich von einer geraden abweichen. Da *Herr Du-Bois-Reymond* zwar die Annahme macht, dass der Einströmungspunkt in der Oberfläche liege, seine ferneren Schlüsse aber nicht wesentlich auf diese Annahme stützt, so liegt wohl die Vermuthung nahe, dass bei den Versuchen des Herrn *Beetz*, welche eine nicht zu verkennende Annäherung an das Gesetz der Cuben ergeben, die Forderung der Herrn *Du-Bois-Reymond*, dass die Oberfläche der Flüssigkeit durch die Einströmungspunkt gehe, nicht berücksichtigt worden ist, sondern dass Herr *Beetz*, was zweckmässiger sein dürfte, grössere Flüssigkeitsmengen anwandte, so dass in der Reihe für $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$

$$\sum_{-\infty,\infty} (-1)^m \left(\frac{2m\beta + \alpha}{\sqrt{rr + (2m\beta + \alpha)^2}^3} - \frac{2m\beta - \alpha}{\sqrt{rr + (2m\beta - \alpha)^2}^3} \right)$$

die späteren Glieder oder doch ihre Summe gegen das erste vernachlässigt werden konnten. In diesem Falle würden die hübschen Versuche des Herren *Beetz* wirklich als ein Beweis anzusehen sein, dass die Stromvertheilung nahezu nach den vorausgesetzten Gesetzen erfolgt. Sollte aber diese Vermuthung irrig sein, so wäre aus Herrn *Beetz*'s Versuchen zu schliessen, dass noch andere Umstände bei der Berechnung der Stromvertheilung in Betracht zu ziehen sind, deren Ermittlung einer neuen experimentellen Untersuchung obliegen würde.