O Teorema de Banach-Tarski:
Paradoxo ou Ilusão?
O Axioma da Escolha: status quo, defesa e crítica [1]

Porto, Maio de 2007

Uma curta análise crítica do estatuto do axioma da escolha e sua defesa em face dos problemas levantados pelo teorema de Banach-Tarski e por outros resultados que nos aparecem como paradoxais.

[1] Eduardo Francisco Rêgo. DEPARTAMENTO DE MATEMATICA PURA E CENTRO DE MATEMATICA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - FACULDADE DE CIENCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO.

1 Introdução

Recentemente, e em relação com conferências que fizemos sobre Intuicionismo e Teoria de Categorias/Topos[2], fomos levados, ainda que de forma indirecta, a considerar o Paradoxo de Banach-Tarski. Um dos aspectos da relação entre intuicionismo e teoria de topos, que era o tema central dessas conferências, prende-se com o estatuto do axioma da escolha (**AC**: axiom of choice) no programa intuicionista, por um lado, e, por outro, com o facto de a lógica de um topos em que **AC** se verifica (numa formalização adequada em termos de teoria de categorias) ser clássica, no sentido do *princípio do terceiro excluído* (**TND**: tertio non datur) ser válido, o que não é em geral, i.e., para a grande maioria dos topos, o caso: a lógica prevalecente no universo dos topos é a lógica intuicionista. O axioma da escolha na sua forma geral é recusado pelo intuicionismo, por razões que se prendem, de uma forma directa, com a recusa de **TND**: na verdade, Diaconescu [1975], mostrou que **AC** implica **TND**. Mas essa recusa pode ser vista também, no âmbito mais restrito da análise matemática (e da teoria dos conjuntos que lhe está associada), como uma consequência natural das construções alternativas do continuum e da análise intuicionista (não esquecendo, no entanto, que a recusa de **TND** bem como de outros princípios lógicos, está naturalmente subjacente a essas construções).

Neste contexto, impunha-se referir, em contraste, o estatuto de **AC** na matemática dita, por comparação, "clássica". É claro que o axioma da escolha é, e sempre foi, usado livremente na prática corrente da matemática "clássica". Na verdade, na sua formulação geral é mesmo equivalente a um sem número de teoremas matemáticos (ver, [Jech (1973)] ou [Moore (1982)]), e muito frequentemente a sua suposição está apenas implícita, e não raras vezes de forma automática e inconsciente, no uso de resultados que dele dependem. Por exemplo, em análise, quando usamos, de acordo com a conveniência técnica do momento, e de forma intermutável, porque equivalentes, as formulações das noções de limite e de continuidade, em termos ora de ε, δ , ora de sucessões convergentes. Mas convém lembrar que alguns dos resultados que foram provados com o uso de **AC** têm um carácter tão fortemente contra-intuitivo, que são suporte para argumentos no sentido de recusar a sua validade: os exemplos mais fortes, neste aspecto, são os resultados sobre decomposições paradoxais, em especial o *Paradoxo de Banach-Tarski*:[3] [Banach & Tarski (1924)]

O Paradoxo de Banach-Tarski: Dois subconjuntos A, B de $\mathbb{R}^3$ dizem-se *equidecomponíveis*, $A \sim B$, se existem partições finitas, $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$, tais que para cada $k = 1, ..., n$, $B_k = h_k\ (A_k)$ em que $h_k \in Isom(\mathbb{R}^3)$ é uma isometria, isto é A_k e B_k são congruentes, $(A_k \cong B_K)$ É facil verificar que a relação de equidecomponibilidade é uma relação de equivalência entre os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. O que o teorema de Banach-Tarski afirma é que considerada uma esfera de raio r , $B_r = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq r\right\}$, e uma sua cópia disjunta,$C_r = B_r + z$,$\|z\| > r$, então $B = B_r$ e $A = B_r \cup C_r$ são equidecomponíveis!! De uma esfera obtemos, como num jig-saw puzzle, duas esferas do mesmo tamanho! (Dizemos que a esfera é um *conjunto paradoxal*). Por aplicação repetida, temos que uma esfera é equidecomponível à união disjunta de um qualquer número de esferas do mesmo raio.

Na sua forma mais forte, o teorema de Banach-Tarski diz que dois quaisquer subconjuntos A, B de $\mathbb{R}^3$, limitados e de interior não-vazio são equidecomponíveis: em particular, e numa forma que nos interessará especialmente, de uma pequena esfera de raio r, podemos obter uma esfera do tamanho do Sol, de raio R tão grande quanto queiramos!

Depois de, há mais de vinte anos, termos visto pela primeira vez, com surpresa e absoluto encanto, uma prova do resultado nas páginas iniciais de [Jech (1973)], e seguidamente o livro de Stan Wagon, fazia já muito tempo que não pensávamos nos "problemas"levantados pelo Paradoxo. O que agora nos surpreendeu, em conversas com colegas ou em literatura mais recente, foi verificar, num olhar retrospectivo, a constância do tipo de argumentos que habitualmente são contrapostos, para "explicar"o aparente paradoxo e em defesa de **AC**. Essa surpresa, e também constatar, em alguns desses argumentos, um uso variado do significado de "construtivo"em matemática motivaram-nos para escrever esta breve nota,[4] para analisar o que nos parecem ser defeitos recorrentes desses argumentos, ajudar a esclarecer o(s) significado(s) de "construtivo"e, por fim, argumentar que o Paradoxo é real, existe de facto, pelo menos de um ponto

[2] O texto, E. F. Rêgo (2007), de carácter expositório, pode ser obtido em www.fc.up.pt/cmup/preprints

[3] Ver [Wagon (1986)], e [Laczkovich (1994)] para um tratamento desenvolvido deste tópico.

[4] Uma versão em inglês está a ser preparada.

de vista que nos parece bastante relevante para certas questões sobre a aplicabilidade da matemática, em relação a alguns critérios e práticas usualmente seguidos. É aliás uma convicção que este tipo de discussão filosófica é geralmente útil para esclarecer detalhes relativos à aplicabilidade da matemática - e aos seus limites - que essencialmente nos motiva. Por outro lado, queremos deixar bem claro que não nos move qualquer utopia ou delírio revisionista, no sentido de reprovar o uso "clássico"(institucional ou oficial seriam talvez melhores adjectivos) do axioma da escolha. Talvez a melhor maneira de descrever sucintamente a nossa atitude relativamente ao uso de princípios como **AC** - que consideramos como não válidos quando a questão do seu estatuto de verdade se coloca a cru, isto é, por si mesma, isoladamente e de uma forma geral e absoluta - é dizer, sem qualquer ironia, que é semelhante à atitute que temos relativamente a algumas fábulas. De forma nenhuma queremos o seu fim, nem achamos que o que nelas se conta seja na sua essência falso; pelo contrário, reconhecemos-lhes um grande valor epistémico. São um óptimo processo para extrair princípios éticos, ou simplesmente de bom senso - uma "moral da história", exactamente - em particular porque permitem, precisamente através do processo de efabulação, uma mais fácil abstracção de considerações secundárias sobre as profundezas complexas dos personagens bem como de factores subjectivos ligados à possível identificação por "semelhança familiar"com essas personagens; o que as torna, também por isso, especialmente indicadas para as mentes mais jovens (embora por vezes também percam o seu poder encantatório, ou a "moral da história"possa ser até profundamente imoral). Mas claro que não acreditamos, por exemplo, que os animais na verdade falem! De outro modo: digamos que nos revemos de certa forma na ideia hilbertiana do valor epistémico da "matemática ideal"(que deve ser deixada livre em nome desse mesmo valor) e com a convicção (digamos também hilbertiana, mas agora para-finitista) da existência de alguns princípios sólidos do pensamento humano, a serem descobertos ou estabelecidos, em que ela assenta, mas que na sua essência estarão mais próximos dos princípios intuicionistas do que dos clássicos (como aliás, pelo seu carácter construtivo, estariam já no programa finitista de Hilbert).

Esta nota divide-se em duas partes. Na primeira parte, analisamos os argumentos mais usuais, que o são do nosso ponto de vista, que tentam explicar o paradoxo e defender **AC**. Na segunda argumentamos a favor da existência real do Paradoxo[5].

2 "O Paradoxo não existe..."

Perante o Paradoxo, conclui-se de imediato que os conjuntos da partição não são *mensuráveis*, o que significa, em termos gerais, que não se lhes pode atribuir um *volume*, caso contrário o paradoxo resultaria em pura contradição em face das propriedades básicas da noção de volume, que são a aditividade e a invariância por movimentos rígidos. Por vezes, na referência à existência destes conjuntos não mensuráveis, o *argumento típico*[6] que analisaremos estrutura-se já numa forma embrionária: somos recordados que a própria existência de conjuntos não mensuráveis é um facto não intuitivo ou mesmo contra-intuitivo, mas contudo nos habituámos já à sua presença e uso nas teorias de medida e de integração. E estas teorias são parte central da matemática, em especial nas suas aplicações. O uso de 'habituámos', atrás, não foi indiferente: somos também recordados que o que consideramos intuitivo ou contra-intuitivo varia progressivamente no tempo, e o que é considerado contra-intuitivo numa época deixará de o ser noutra posterior, à medida que o conhecimento evolui e se acrescenta. Vemos aqui algumas características do argumento típico:

(i) Remeter para outros resultados ou conceitos também dependentes de **AC** e que, à primeira vista, são ou foram também considerados como não intuitivos;

(ii) Salientar o papel desses resultados e conceitos na prática matemática corrente e nas suas aplicações, com a sugestão - no que parece ser uma implicação óbvia - de que a recusa de **AC** nos levaria a ter de recusar também esses resultados;

(iii) Sugerir, atendendo à relatividade temporal e histórica do que é "intuitivo"e à estabilidade bem sucedida da prática matemática - incluindo a que foi feita com o uso liberal de **AC** - que o paradoxo é

[5] A partir de agora, usaremos frequentemente apenas 'Paradoxo' para designar o teorema/paradoxo de Banach-Tarski.

[6] Usaremos doravante 'argumento típico' ou somente 'argumento' para nos referir à classe de argumentos explicativos do Paradoxo que possuem um núcleo central de características em comuns que iremos analisando.

essencialmente de natureza psicológica (ainda não nos "habituámos"a fazer um Sol de uma ervilha).

Mais à frente analisaremos estas, e outras, características do argumento típico em exemplos onde elas estão mais claramente explicitadas e por isso, para já, fazemos apenas algumas observações.

A noção geral de medida de um conjunto nasceu na teoria de funções de variável real, em conexão com o estudo e aprofundamento da noção de integral - com Jordan, Borel e Lebesgue - na viragem de século XIX-XX, quando grande parte dos conceitos e técnicas operacionais do cálculo infinitesimal envolvendo diferenciação e integração estavam já estabelecidos[7]; mas, por outro lado, o processo de abstracção aí iniciado, com destaque para a definição de (integral de) Lebesgue, trouxe uma generalidade à noção de integral que é essencial ao tratamento de muitas questões da análise moderna; essa generalidade vê-se também na profusão dos diferentes tipos de integrais entretanto criados. A questão que se aqui se coloca é saber se as aplicações destas teorias de integração dependem fundamentalmente de alguma teoria da medida, em especial dos aspectos exóticos da relação desta com a estrutura fina dos reais, que envolvem, em particular, a existência de conjuntos não mensuráveis (deixando de lado a questão mais marginal para o assunto que agora nos ocupa, mas mais ampla e não menos interessante, da discussão se o modelo standard dos reais é insubstituível para as aplicações da matemática). Ou se, pelo contrário, e tal como acontece ao corpo central do cálculo diferencial e integral desenvolvido anteriormente, estas generalizações do conceito de integral podem viver, no que é essencial às suas aplicações efectivas, de forma independente da teoria abstracta da medida. Este não é o momento para explorar esta questão - a que no entanto teremos necessidade de nos voltar a referir mais adiante - mas podemos adiantar que nos parece que essa dependência não é de facto necessária; em particular, atendendo ao facto que a esmagadora maioria (isto para não cair no que poderá talvez ser um exagero de dizer a totalidade) das funções que aparecem nas aplicações são Lebesgue-mensuráveis e que o integral de Lebesgue pode ser dado de forma axiomática (na forma de "funcional"); e que o mesmo é válido para a generalidade dos integrais.[8]

Outra observação é que, aos olhos de alguém que defenda a invalidade do axioma da escolha pela existência do Paradoxo, este contra-argumento em termos da existência e uso matemáticos, habituais e já assimilados, dos conjuntos não-mensuráveis *"begs the question"*. Na verdade, enquanto o axioma da escolha tem um aspecto de evidência, pela sua fácil formulação em generalização do caso finito em que aparece como evidência de facto, e pode, por isso mesmo, ser explicado facilmente a um leigo, as subtilezas formais dos conjuntos não-mensuráveis são de mais difícil acesso[9]. De facto, para além de um tipo de equivalência lógica entre **AC** e a existência de conjuntos não-mensuráveis - no sentido de que sem **AC** é possível construir em ZF modelos dos reais em que todos os conjuntos são mensuráveis[10]- reconhece-se uma grande complexidade matemática nas questões que se prendem com a mensurabilidade e que ultrapassam em muito as suas ligações a **AC**. Os estudos de Borel, Baire e Lebesgue, no princípio do século XX, relacionados com a mensurabilidades dos conjuntos deram origem a um ramo próprio da teoria dos conjuntos, a chamada *Teoria Descritiva dos Conjuntos*, com um leque próprio de questões, muitas das quais se provou serem independentes de ZFC. Para além disso, existe uma relação grande entre a noção de mensurabilidade e alguns dos aspectos mais sofisticados da teoria geral dos conjuntos. A noção de *cardinal mensurável* (o tipo de cardinal mais estudado entre os chamados grandes cardinais) tem origem no problema, colocado inicialmente por Lebesgue, de encontrar uma função ω-aditiva, invariante e definida para todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$, o que Vitali mostrou, em 1905 e usando **AC**, não ser possível.[11]

[7] Talvez por isso, os compêndios de (análise) matemática que tratam o cálculo diferencial e integral que é necessário para os estudantes das várias ciências, incluindo a física e as diversas engenharias, na esmagadora maioria não abordam teoria da medida, nem sequer o integral de Lebesgue (mesmo quando se intitulam "advanced calculus"). Normalmente basta-lhes definir a noção de área ou volume para regiões adequadas (que têm *content*), e que aparecem naturalmente nos exemplos de aplicação, sem ser necessário abordar a questão da existência de regiões estranhas ou exóticas.

[8] Refira-se, a propósito, que o integral de Feynman que tem sido, até ao presente, instrumento essencial na física das partículas, não foi susceptível de um tratamento satisfatório pela teoria da medida - mesmo com a existência de generalizações matemáticas de integral tão *integradoras* como o integral de Henstock - mas que, no entanto, tem tratamentos axiomáticos.

[9] Talvez o exemplo mais simples de conjunto não–mensurável - e parece que o mais antigo também - seja o de Vitali (1905): um conjunto de Vitali é um conjunto contendo um representante de cada classe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, isto é um conjunto que, pelo axioma da escolha, contém precisamente um real de cada conjunto da forma $\mathbb{Q}+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

[10] E de novo somos levados a pensar na questão do que tornará o modelo standard tão standard...

[11] Ver Maddy (1997). A primeira parte do livro constitui uma óptima introdução aos conceitos e problemas da teoria de conjuntos; citando da página 75:

Lebesgue's own theory of measure satisfies these conditions, but does not make assignments to every set of reals. During

Em conclusão, parece-nos que alguém que considere a possibilidade de descartar **AC**, mais facilmente abdicará dos conjuntos não mensuráveis. Em especial se acreditar que o essencial da aplicabilidade da integração não depende da consideração desses conjuntos; ou que o essencial da noção de mensurabilidade pode ser captada de outras formas. Dir-se-á que descartar **AC** ou os não-mensuráveis *é a mesma coisa*, devido à equivalência lógica que referimos atrás, e o mesmo para outros resultados matemáticos que são equivalentes a **AC**; mas aqui há mais do que é aparente, e levantam-se algumas questões subtis de que trataremos mais adiante.

Mas o argumento típico, tem como característica essencial um refinamento da característica (iii):

(iv) Mostrar que o Paradoxo tem com certeza um carácter meramente psicológico, já que existem resultados *do mesmo tipo*, também contra-intuitivos do ponto de vista das nossas intuições geométricas e físicas - o que nos levaria, analogamente, a questionar os princípios matemáticos em que se baseiam - e que no entanto são provados sem o recurso a **AC**.

Vejamos um exemplo, em Potter (2004). A páginas 276 Michael Potter escreve, logo após recordar o facto de os conjuntos da decomposição não poderem ser todos mensuráveis:

> The Banach/Tarski theorem has sometimes been used in an attempt to *refute* the axiom of choice: the conclusion of the theorem is intuitively false, it is said, and therefore the axiom of choice cannot be true. In order to use it in this way, though, we would need to have an intuitive argument not depending on the concept of area for disbelieving in the possibility of the decomposition mentioned in the theorem, and it is by no means clear that such an argument exists.

Note-se que ao concluir da necessidade de um argumento não dependente do conceito de área[12], para não acreditar na possibilidade das decomposições paradoxais, Michael Potter está a pressupor que as intuições relativas ao "conceito de área"dependem exclusivamente das formulações matemáticas em termos da mensurabilidade de conjuntos, i.e., que não é possível, por algum processo intuitivo, associar a um conjunto não mensurável uma ideia de área. E prossegue:

> The point is one we came across when we were considering real analysis in chapter 8. We have already seen that in testing the axiom of choice geometrical intuitions derived from *elementary* geometry - the geometry of straightedge and compasses - are irrelevant.[13]So the geometrical intuitions involved here cannot be elementary in this sense, but must depend on our general grasp of properties of transcendental functions. But experience already suggests that our intuitions concerning such functions need to be educated before much reliance can be placed on them.

Como se vê, a última afirmação cai já no âmbito da característica (iii). Mas, antes de prosseguir, queremos notar que embora concordando que as intuições geométricas aqui envolvidas ultrapassam o nível elementar, não nos parece claro que devam depender do nosso "general grasp of properties of transcendental functions"; como veremos mais à frente, a propósito de outro exemplo, essas intuições podem ser do tipo topológico e de difícil ligação à consideração de funções transcendentes. Continuando,

the teens and twenties, the question was gradually simplified and generalized (by Banach and others) to this form: is there a set S and an assignment of either 0 or 1 to each subset of S such that (i) S itself is assigned 1, (ii) for $s \in S$, $\{s\}$ is assigned 0, (iii) the number assigned to the union of a collection of fewer than the cardinality of S disjoint subsets of S is the sum of the numbers assigned to the individual memebers os tha collection? For $S = \omega$ the answer is yes; in his (1930), Ulam defined a measurable cardinal to be a cardinal numbre greater than $\aleph_0$ that admits such an assignment of 0s and 1s to its subsets (the assignment itself is the measure on it), and showed what os not immediately obvious: measurable cardinals are inaccessible.

[12] M. Potter refere-se a *área* e não a *volume* porque enuncia o Paradoxo em termos de uma decomposição da *superfície* da esfera unitária.

[13] Não é totalmente claro (pelo menos para nós) a que se refere M. Potter. Mas poderá ser à existência dos números transcendentes e às provas dessa existência do tipo cantoriano, através de noções de cardinalidade e recorrendo a instâncias do argumento diagonal, e que envolvem escolha. Ou talvez mais geralmente à noção matemática usual de continuum (no caso, o continuum tridimensional da esfera unitária que é decomposta no Paradoxo), que depende do axioma de escolha e que contém muito mais do que os "números"(ou entidades) dados pelas construções da geometria elementar.

> This is a common phenomenon in mathematics. The ancient Greeks apparently regarded their discovery of the existence of irrational numbers as paradoxical (whether or not one of them drowned because of it, as myth claims); if no trained mathematician would have this reaction today, that is precisely because by studying the phenomenon we have reached an understanding of the reasons for it, and hence, far from seeming paradoxical, it comes to be just what we intuitively expect. In much the same way, those who have received the appropriate education seem generally disinclined to regard the conclusion of the Banach/Tarski theorem as false. (What is harder to judge, of course, is wether they are influenced in this view by also having been educated to believe the axiom of choice).

Aqui está a característica (iii) (e também, de certa forma, (i) e (ii): que matemática sobreviveria sem irracionais?), colocada de forma particularmente lúcida pela observação final entre parênteses. Muito haveria a dizer sobre o mérito destas comparações históricas, do que conta como paradoxo e intuição, quando se estão a confrontar épocas tão afastadas.

Talvez venha a propósito referir já aqui a *intuição física* (ou material) e a sua relação com o Paradoxo. Na verdade, como veremos na segunda parte, o Paradoxo é geometricamente contra-intuitivo sobretudo pelas relações com intuições físicas que possuímos, quer relativamente aos movimentos rígidos, em particular ao que é por eles invariante, quer à constituição material/espacial na *idealização de meio contínuo* que usamos em Física, em particular com uma associada noção de *homogeneidade*. Voltaremos a este assunto na segunda parte. Referimo-lo agora, a propósito deste uso argumentativo da relatividade do que conta como intuitivo ou contra-intuitivo e de como essa relatividade depende da educação científica que se possui, para mencionar, em comparação, o caso da Física Quântica.

A teoria quântica embora seja, a par da teoria da relatividade, talvez a teoria científica mais bem sucedida da história da ciência, em virtude da verificação experimental sistemática das suas previsões, com uma impressionante precisão do cálculo envolvido, é também das teorias científicas que mais problemas filosóficos coloca relativamente à natureza última da realidade. Não só pelos aspectos contra-intuitivos de alguns dos seus resultados, mas também porque a sua constantemente reconfirmada efectividade sempre viveu com enormes problemas conceptuais e mesmo contradições, bem patentes nos famosos debates Einstein/Bohr, sobre as suas interpretações. Mas cresceu e vive, como aliás nasceu, pelo critério último da verificação experimental.[14] Em termos simples: vale porque, em última análise, *funciona*!

Em comparação, percebe-se facilmente porque razão os resultados da matemática, e os problemas conceptuais e ameaças de possíveis contradições que alguns deles levantam, não suscitam tantos problemas filosóficos sobre o tecido último da realidade, mesmo quando, como no caso do Paradoxo de Banach/Tarski, afirmam de forma clara algo de significativo e surpreendente sobre o espaço e objectos físicos que nos rodeiam, como usualmente os concebemos (ou pelo menos não os suscitam com a necessidade e empenho em os debater, análogos aos dos físicos em relação à teoria quântica). Para o típico trabalhador matemático, a matemática não está sujeita ao escrutínio da verificação experimental e não se imagina da sua parte mais do que um encolher de ombros, perante um argumento que dissesse, parafraseando a primeira citação de Michael Porter: ... therefore the axiom of choice cannot be true. In order *not* to use [the Banach/Tarski theorem] in this way, though, we would need to have some *physical experiment* for *believing* in the possibility of the decomposition mentioned in the theorem, and it is by no means clear that such an *experiment* exists.

Numa apreciação positiva, e simpática, a característica **(iv)** do argumento típico pode ser vista como um tipo de "experimentação", ainda que feita apenas em termos internos (à matemática) e de forma indirecta. Vejamos então um exemplo, ainda em Potter (2004); a última citação prossegue:

[14] Nasce com os resultados experimentais em torno do conceito de radiação de corpo negro (pode-se assinalar a data de 1859-60, com o trabalho de Kirchoff). Por outro lado, só em 1981-82, com as experiências de Alain Aspect et al., se viria a testar de forma conclusiva os aspectos de emparelhamento de estados, (não) localidade e acção à distância, que opunham Bohr (a interpretação standard, de Copenhaga) a Einstein, em volta da chamada experiência EPR (um teste virtual, desenhado por Einstein, Podolsky e Rosen, em 1935, para argumentar que a teoria quântica era incompleta)

Ver o livro de Jim Baggott (2004) para uma excelente descrição e explicação da teoria quântica (evitando formalismos que são deixados para os 27 apêndices). A ele devemos (durante umas férias de verão) termos ganho uma visão coerente e unificada, ainda que necessariamente superficial, desta fascinante teoria.

> The impression that the Banach/Tarsli theorem does not show the axiom of choice to be false is further strengthened if compared to the following result.
>
> **Theorem (Mazurkiewicz and Sierpinski 1914)**. *There is a non-empty subset E of the Euclidean plane which has two disjoint subsets each of which can be split into finitely many parts which can be rearranged isometrically to form a partition of E.*
>
> This theorem is certainly surprising, but this time we cannot blame the axiom of choice since the proof does not require it: the sets involved in the decomposition are measurable[15]

Deixemos para depois uma apreciação e comparação dos graus de surpresa e de contra-intuição que os diferentes exemplos deste tipo suscitam e a questão do que poderá estar na base dessas sensações, e observemos apenas, relativamente a este exemplo, que o facto de o conjunto E ter área 0, e ser além disso *não-limitado*,[16] já lhe retira dois ingredientes cuja combinação, envolvendo a noção de volume finito, parece ser fundamental na contra-intuição provocada pelo do Paradoxo. E na verdade Michael Porter concede que

> It may indeed be that this is not *quite* as surprising as the previous result, but it surely weakens one's confidence that the conclusion of the Banach/Tarski theorem is intuitively false.

Mas na ausência de reconhecimento que os exemplos que são avançados não têm o mesmo grau de contra-intuição que o Paradoxo, o que é o caso mais frequente, é inevitável fazer agora uma apreciação negativa da característica **(iv)** do argumento típico. A primeira crítica, de carácter geral, é que este aspecto do argumento é em grande parte *retórico* e pode ser visto como uma *tentativa de inversão do ónus da argumentação*: cabe agora à vítima do Paradoxo, possivelmente espantada e confusa, explicar o que diferencia o Paradoxo dos exemplos que lhe apresentam, ou então reconhecer a sua contradição e abandoná-la, por imperativo de coerência, ainda que sem grande convicção e possivelmente ainda mais espantada e confusa (e já sem o possível remédio de poder considerar o abandono de um princípio, o da escolha, ou de, pelo menos, tentar relativizar a sua importância e condicionar o seu uso).

Outras críticas e análise da característica **(iv)** bem como das outras características do argumento típico serão agora feitas sobre um outro exemplo, desta vez retirado de Laczkovich (1994). Na secção 3. deste seu artigo, intitulada *The nonconstructive element in the Banach-Tarski paradox*, Laczkovich começa por lembrar que o axioma da escolha gerou controvérsia logo desde a sua formulação por Zermelo em 1904, encontrando-se entre os que se lhe opunham *"most vehemently"* Baire, Borel e Lebesgue que, como explica, *"did not realize that the theory itself they had developed contained nonconstructive elements in that the σ-additivity of the Lebesgue- measure cannot be proved in ZF alone"*. Vemos neste comentário sobre os criadores da teoria da medida, um exemplo da característica **(iii)** do argumento típico: o relativismo da noção do que é intuitivo vai até ao ponto dos próprios matemáticos em processo criativo puderem entrar em contradição, ao usarem, ainda que de forma de forma inconsciente, princípios que eles próprios contestam. Laczkovich prossegue:

> The existence of nonmeasurable sets and the paradoxes intensified the criticism, and these discoveries were used as "evidence"against the axiom of choice. Strictly speaking this is not justified, since either one has fundamental and philosophical objections against the axiom of choice (as the early opposers had) and then it does not really matter what actual consequences the axiom has, or one accepts the axiom and then has to accept the consequences has well.

Está aqui, nesta citação, formulado de forma clara e explícita o princípio que subjaz às características **(i)** e **(ii)** do argumento típico: um princípio absoluto de aceitação ou recusa de **AC**, sem possibilidades

[15] Michael Porter acrescenta em nota de rodapé:
It is easy to deduce that the area of the set E mentioned in the theorem must be zero.

[16] Na verdade, Mazurkiewicz e Sierpinski provaram um resultado mais forte do que o enunciado: que cada um dos subconjuntos é mesmo *congruente* com E; e A. Lindenbaum provou [Lindenbaum (1926)], que no plano um subconjunto *limitado* não pode verificar este resultado. Entretanto, só em 1987 [Just (1987)] foi provada a existência de um subconjunto do plano, *limitado e paradoxal*; mas que tem também de ter área 0 em consequência do resultado de Banach (1923) que afirma que para $n = 1$ e $n = 2$ a medida de Lebesgue pode ser extendida a todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ como uma medida finitamente-aditiva e invariante (por isometrias).

de nuances intermédias; e a regra, presume-se que por coerência, de, no caso da sua aceitação - incluindo presumivelmente como forma de aceitação algum seu uso efectivo, ainda que inconsciente como no caso referido de Baire, Borel e Lebesgue - se ter de aceitar também todas as suas consequências. E está também a sugestão de que a recusa de **AC**, a existir - caso em que então não interessa quais as suas consequências - deverá ser o resultado de objecções fundamentais e filosóficas (mas não se percebe porque razão é exluída a hipótese de uma recusa de **AC**, ser feita à posteriore, em virtude da constatação e recusa de alguma ou algumas das suas consequências contra-intuitivas). A dicotomia metodológica aqui enunciada por Laczkovich e acente num princípio absoluto de aceitação/recusa de **AC** contrasta com a ideia, que exprimimos na introdução, de poder usar, de forma útil, princípios como **AC** mesmo quando considerados falsos na generalidade (quando assemelhámos esse uso possível ao uso da fala nas fábulas).

Pensámos que esta dicotomia metodológica não é aconselhável do ponto de vista da produtividade matemática, sobretudo se se tem como preocupação primeira, não a manutenção do edifício da matemática, mas as antes as suas aplicações efectivas; mas também que mesmo de um ponto de vista interno à matemática, esta dicotomia não é defensável e nem corresponde, em geral, à prática usual da investigação. Claro que se se acredita que **AC** em toda a sua generalidade é verdadeiro, se deve acreditar também nas suas consequências, desde que confiemos no método de dedução seguido, mas já não parece razoável termos de decidir à priori se o princípio é geralmente válido ou não e condicionar totalmente o seu uso a essa decisão. Grande parte dos resultados matemáticos têm a forma de "*se* isto, *então* aquilo"e nem sempre podemos, ou queremos, verificar de imediato as condições de satisfação das hipóteses, em particular em algum exemplo ou modelo, *ou se não serão vazias ou mesmo contraditórias.*[17] Mesmo para alguém que recuse, por razões fundamentais e filosóficas, a validade geral de **AC**, uma prova feita com recurso ao axioma pode ter interesse epistémico: pode, por exemplo, fornecer indicações de como outra prova do mesmo resultado mas baseada num princípio mais fraco poderá vir a ser obtida, se o resultado em causa parecer interessante ou de grande utilidade. Mais importante, pode também dar-se o caso que o processo de escolha que foi usado numa dada prova, seja justificado e sancionado por alguns critérios extra, relativos às hipóteses particulares de que partimos ou à natureza do problema que tratamos; isto é particularmente pertinente se estamos a usar um teorema geral cuja prova dependa de **AC**, num modelo particular de aplicação: poderá acontecer que o processo de escolha que é usado na prova, tenha na sua tradução para o modelo um carácter natural, ou até óbvio, em especial quando o modelo não é exacto e envolve aproximações numéricas ou heurísticas. Assim, e em referência a uma citação anterior, o uso de alguma forma de escolha na σ-aditividade da medida de Lebesgue, não significa, *tout cours,* que seja contraditória com a oposição à validade *geral* do princípio da escolha e a algumas das suas consequências, como a existência de conjuntos não-mensuráveis. Aliás a secção 3. de Laczkovich (1994), de que temos citado, contém elementos que poderão até ser vistos como corroborando em parte o que acabámos de afirmar, embora sejam usados no espírito das características **(i)** e **(ii)** do argumento típico:

> (...) The axiom of choice, in its full strength, is almost never used in analysis. Some weaker statements, however, are needed in several applications. Such statements are, for example, the Boolean Prime Ideal theorem and the statement that the product of any number of compact Hausdorff spaces is compact. It is known that these statements are equivalent in ZF and are strictly weaker than the axiom of choice. An even weaker statement is the Hahn-Banach extension theorem...[18]

Laczkovich enuncia depois dois teoremas, um de M.Foreman e F. Weherung de 1989 que afirma que *The axioms of ZF together with the Hahn-Banach theorem imply that there exist non-Lebesgue measurable sets*, e outro, de J.Pawlikowski de 1991, que afirma que *The axioms of ZF together with the Hahn-Banach theorem imply the Banach-Tarski paradox*, para concluir:

[17] Como a maioria dos matemáticos profissionais não se preocupa muito com questões da lógica, o que se reflecte no facto dos cursos de graduação em matemática não terem usualmente mais do que um curso semestral obrigatório de introdução à lógica matemática, é com certeza com o valor de um alerta para esta possibilidade de hipóteses vazias ou contraditórias, e não para suscitar uma reflexão sobre o paradoxo de Lewis, que nesses cursos normalmente se mostra aos estudantes que de uma contradição tudo segue.

[18] Ver, por exemplo, o capítulo 2 de Jech (1973) para estas e outras relações e equivalências de resultados matemáticos com **AC**.

> These results say that rejecting the Banach-Tarski paradox we would also have to reject the Hahn-Banach theorem and the Boolean Prime Ideal theorem,[19] and thus large parts of topology and functional analysis as well.

O que dissemos atrás sobre as consequências de uma rejeição de **AC**, pode ser dito e adaptado relativamente à rejeição do teorema de Hahn-Banach, no sentido de relativizar essa rejeição, recusando uma dicotomia na metodologia dos usos do teorema. É verdade que, comparativamente, será talvez mais difícil relativizar o uso, em função das circunstâncias particulares da aplicação, dos ingredientes no teorema de Hahn-Banach que permitem dele deduzir o Paradoxo, mas o que é importante é que o princípio dessa possibilidade se mantém.[20] Queremos que fique claro que não estamos a avançar ou sequer a admitir a possibilidade de que, na prática matemática, se passe efectivamente a fazer um controlo casuístico da aplicação de certos princípios, ou resultados, cuja validade geral seja posta em causa pelo Paradoxo; estamos tão só a afirmar que quem recuse essa validade geral, não está, *por princípio*, obrigado a proscrever radicalmente o uso desses princípios ou resultados e que por isso o argumento típico é frágil nas suas características **(i)**,**(ii)** e **(iii)**, que são assim vistas como essencialmente retóricas.

Claro que se num sentido - o da interdependência lógica relativa no âmbito da teoria dos conjuntos com base ZF - a recusa do teorema de Hahn-Banach parece uma atitute mais radical porque é a recusa de algo mais fraco do que **AC**, por outro lado a recusa de **AC** é mais drástica porque é, aparentemente, um princípio muito natural, de fácil formulação e de aplicação generalizada. Mas sem dúvida que o argumento ganha, nestas considerações, maior persuasão: porquê contestar um princípio aparentemente tão natural como **AC**, por causa do Paradoxo se, pelo mesmo motivo, teríamos de abandonar também alguns princípios e teoremas "mais fracos"mas também nucleares a certas áreas e aplicações da matemática? Em especial quando, face a resultados deste tipo, surge como natural considerar a possibilidade de que o Paradoxo seja consequência de princípios ainda mais fracos. Essa possibilidade é reforçada pela característica **(iv)** do argumento; de facto, e retomando a nossa última citação, Laczkovich termina a secção 3. do seu artigo, afirmando:

> But even the complete negation of the axiom of choice could not save us completely from paradoxes. Indeed, the existence of paradoxical plane sets [21] (...) is proved without the axiom of choice. While these are "only"countable sets, in the next section we shall see that in ZF one can prove paradoxes involving open subsets of $\mathbb{R}^3$ that are *as surprising as the Banach-Tarski paradox* (ênfase nosso).

Vejamos o exemplo a que se refere Laczkovich.

Se $A, B \subset \mathbb{R}^n$ são *abertos*, escrevemos $A \approx B$ se existe uma colecção disjunta $\{A_1, \ldots, A_k\}$ de abertos de A cuja união é *densa* em A e uma colecção $\{f_1, \ldots, f_k\}$ de isometrias de $\mathbb{R}^n$ tais que $\{f_1(A_1), \ldots, f_k(A_k)\}$ é uma colecção disjunta de abertos de B cuja união é densa em B.[22] Tal como a relação de equidecomponibilidade, $\sim$, é fácil ver que $\approx$ é uma relação de equivalência. Temos então o seguinte resultado [Dougherty & Foreman (1992)]:

> **Teorema**: Let $n \geq 3$, and A and B be nonempty bounded open subsets of $\mathbb{R}^n$. Then $A \approx B$.

Laczkovich apresenta (pp. 168) uma prova do teorema e diz em seguida:

> We gave this proof in order to make it clear that this amazing theorem is proved entirely constructively. As R. Dougherty and M. Foreman point out, we have a theorem, proved

[19] O teorema dos Ideais Booleanos Primos é estritamente mais forte do que o teorema de Hahn-Banach.

[20] O teorema de Hahn-Banach é equivalente ao princípio de que toda a álgebra de Boole, $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$, possui uma *medida real*, isto é, uma função real μ, definida em B com valores em $[0, 1]$, tal que $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$, e $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ se $a \wedge b = 0$. Por esta equivalência tratar-se-ia, em princípio, de aceitar a razoabilidade, ou mesmo naturalidade, da existência de tal medida em certas aplicações concretas.

[21] Laczkovich refere-se aqui ao teorema de Mazurkiewicz e Sierpinski (1914) e ao teorema de Just (1987) referido numa nota anterior.

[22] Isto é, A e B têm subconjuntos fechados de interior vazio, $A' \subset A$ e $B' \subset B$ tais que os abertos complementares, $A - A'$e $B - B'$, são equidecomponíveis *"por abertos"*.

without the axiom of choice, and asserting that there is a collection of disjoint open subsets of the sun, that fill the sun (in the sense that there are no "holes"of positive radius) and that can be rearranged by rigid motions to remain disjoint and fit inside a pea.

Antes de apreciar o resultado propriamente dito queremos comentar brevemente a expressão *"entirely constructively"*; como afirmámos na introdução, esclarecer o uso (ou abuso) de "construtivo"foi uma das motivações para este trabalho. Nas palavras de Laczkovich "totalmente construtivo"significa antes de mais e com toda a certeza, *sem recurso ao axioma da escolha*; e "totalmente"sugerirá possivelmente que não haverá uso de outros princípios de escolha mais fracos, mas não é claro qual, se for esse o caso, o alcance, ou se há também outros significados. Como é sabido, o uso da escolha é feito muitos vezes de forma implícita e indirecta através dos resultados e noções auxiliares que são invocados, e, por exemplo, pelo menos o *axioma da escolha numerável* será com certeza assumido, já que sem ele o contínuo real (e, mais geralmente n-dimensional, $\mathbb{R}^n$) é radicalmente diferente e partes básicas da análise real (clássica ou mesmo intuicionista) não podem ser feitas.[23] Como mencionámos na introdução, o intuicionismo, que é a mais proeminente corrente construtivista, recusa **AC** [24].Mas o que importa salientar é que há várias correntes construtivistas em matemática, com requisitos diferentes sobre o que deve ou não ser aceite como construtivo e mesmo oposições assumidas entre algumas delas relativamente a este ponto[25]. E que embora todas recusem a validade geral de **AC**, o construtivismo passa muito para lá de uma atribuição de estatuto ao axioma da escolha; este facto pode ser aqui facilmente ilustrado lembrando que para a análise intuicionista, a hipótese do Paradoxo - a equidecomponibilidade - nem se coloca, uma vez que o continuum intuicionista não é "separável", no sentido intuicionista de que não admite partições não-triviais.

Passaremos de seguida à análise do exemplo de como colocar um Sol numa ervilha, com um *mínimo* de desperdício. Mas vejamos primeiro um outro tipo de resultados de matemática que nos aparecem também como *fortemente* contra-intuitivos, mas em que é fácil perceber quais as razões que criam essa sensação de contra-intuição, e, por isso, nenhum paradoxo emerge ou subsiste. São do domínio da topologia geométrica, porque é uma área que nos é próxima e porque exemplificam aspectos importantes para a análise daquele exemplo. Um exemplo é o da existência de certos poliedros de dimensão 2 compactos (i.e., construídos com um número finito de triângulos, por colagem de triângulos ao longo de arestas comuns - o que se chama uma triangulação do espaço poliedral) no espaço tridimensional, $\mathbb{R}^3$, que são *contrácteis mas não colapsáveis*, como o *Chapéu de Burro (Dunce Hat* [26]*)* ou a *Casa com Dois Quartos de Bing* (representada na Figura) "Contráctil"significa que pode ser continuamente deformado dentro de si mesmo até se reduzir a um ponto; não interessa aqui qual o significado técnico de "colapsável", basta dizer que nos dois exemplos citados essa característica decorre do simples facto de não terem nenhuma *aresta livre*: e é precisamente essa ausência que torna o facto de serem contrácteis tão contra-intuitivo, sendo bastante difícil imaginar ou vizualizar uma sua contracção (mas não provar que ela existe!), mesmo para muitos topólogos experientes: onde e como começar uma contracção sem rasgar o espaço? O leitor pode verificar por si mesmo estas afirmações, contemplando a figura seguinte que representa a *Bing's House with Two Rooms*.[27]

---

[23] Ver, por exemplo, Potter (2004), pp. 161-165, para um começo e outras referências.

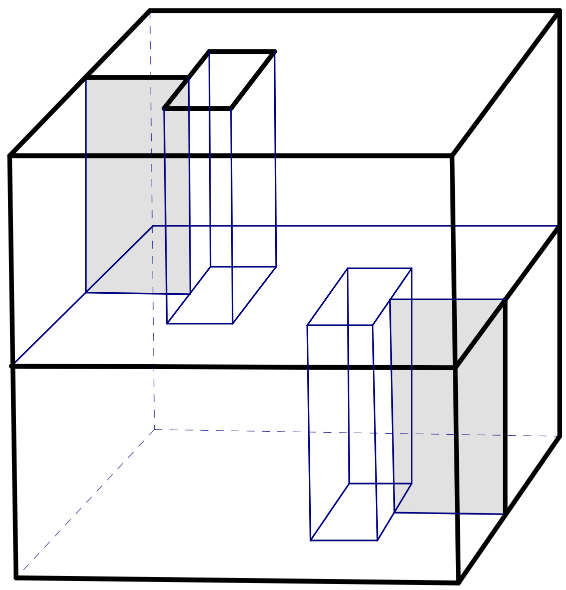
[24] Mas aceita o axioma da escolha numerável de forma absolutamente natural, já que neste caso a existência de funções escolha decorre da forma particular (construtiva) como o quantificador existencial é interpretado, bem como da natureza dos números naturais.

[25] Ver [Troelstra & van Dalen (1988)]; o primeiro capítulo do Volume I contém uma breve descrição e história do construtivismo em matemática.

[26] E. C. Zeeman, On The Dunce Hat, Topology, vol.2 (1964), 341-358.

[27] The house is built in the following way. Start with a closed rectangular box, and add a slab in the middle; then add two more boxes, as shown in Figure, one from the mid slab to the top and another one from the mid slab to the bottom; remove then the base and top from each of these two chimneys. You got a house with two separated rooms: you can get into the bottom room through the top entrance and into the top room from the bottom entrance. Finally add two walls, one in each room as shown shaded in Figure.

[See R. H. Bing, *The Geometric Topology of 3- Manifolds*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 40, Amer. Math. Soc. (1983).]



Não é essencial que o leitor possa efectivamente apreciar este exemplo; o que queremos salientar com ele é que a principal e mais frequente razão para a sensação de contra-intuição é a associação implícita no hábito, por força dos exemplos que nos são familiares, de duas ou mais características que na verdade se revelam em dado momento, num novo exemplo, como separáveis e independentes. No caso em consideração, a força do hábito leva-nos a associar à existência de uma contracção a existência de algum bordo por onde começar; mas visto e estudado um exemplo essa associação é revelada, compreendida e dissipa-se, não sobrando então outros factores para estranheza.

Um outro exemplo, também do domínio da topologia é o dos *Lagos de Wada*: estes são *três regiões abertas e conexas do plano que têm fronteira comum*; este facto é também contra-intuitivo, porque os exemplos usuais de uma fronteira comum a regiões distintas são do tipo de uma curva a separar *duas* regiões[28]. É importante aqui descrever sucintamente a construção dos lagos de Wada: Considere-se um quadrado fechado no plano, Q ; no início da construção temos três lagos, um deles a região aberta, complementar do quadrado, $L_1 = \mathbb{R}^2 - Q$, e os outros dois, L_2 e L_3, os interiores de dois discos disjuntos e separados no interior do quadrado; a *terra firme* é o fechado $Q - (L_2 \cup L_3)$. Em seguida estendemos cada um dos lagos, à vez e em ordem cíclica; estendemos primeiro L_1 (para o interior de Q) de tal forma que cada ponto de terra firma diste menos do que 1 de L_1, em seguida L_2 de tal forma que cada ponto de terra firma diste menos que $1/2$ de L_2, e assim sucessivamente: na fase n da construção estendemos L_i ($n - i \equiv 0 \bmod(3)$) de tal forma que cada ponto da terra firme sobrante diste menos do que $1/n$ de L_i (ou menos do que a_n em que a_n é uma qualquer sucessão de números positivos com limite zero). Em cada passo da construção a terra firme deve permanecer conexa para permitir o passo seguinte (isto significa que os lagos são estendidos escavando braços cada vez mais finos, mas que nunca se fecham: evitam-se os loops). No limite, isto é, após a realização de todas as fases, obtemos os três lagos de Wada.[29]

Estamos agora em posição de analisar o exemplo *"Do Sol para uma ervilha"*. Referindo à última citação de Laczkovich, o aberto (união dos abertos disjuntos) que "enche"o Sol, no sentido de que não deixa buracos de raio positivo, terá de ter volume inferior ao volume da ervilha, pelo que o complementar que é um fechado de interior vazio conterá a maior parte do volume do Sol. Claro que o volume total do Sol pode estar concentrado num conjunto de interior vazio: basta, por exemplo, considerar o complementar de todos os pontos de coordenadas racionais; o que aqui aparece como contra-intuitivo, também por escassez de exemplos conhecidos, é o facto de termos um subconjunto de interior vazio *e fechado*. Quando vimos

[28] A construção foi publicada em 1917 por Kunizô Yoneyama que atribuiu a descoberta ao seu professor Takeo Wada.

[29] Embora este exemplo tenha uma natureza menos construtiva do que os exemplos dos espaços contrácteis, por depender de um processo infinito e limite de construção, enquanto aqueles e as suas contracções podem ser efectivamente dados, na sua totalidade, como objectos e deformações concretas, por outro lado é bem mais fácil de descrever e compreender.

este exemplo, rapidamente nos ocorreu o exemplo dos lagos de Wada: é muito fácil, imitando o processo de construção dos lagos que atrás descrevemos, ver como uma colecção de abertos disjuntos no Sol, nas condições descritas na citação, pode facilmente ser obtida. Construa-se no interior do Sol um segmento poligonal, S_1, tal que qualquer ponto do complementar diste menos do que 1 de S_1 e considere-se um *cubo* $C = \varepsilon\,[0,1]^3$ no interior da ervilha de volume V; em seguida construa-se uma vizinhança A_1, cilíndrica e aberta em torno de S_1, com um pequeno jogo de ajuste nos vértices, e com uma espessura (i.e., o raio da secções ortogonais a S_1) tão pequena que o seu volume seja inferior a $V/2$ e possa ser construída por justaposição de pequenos cilindros disjuntos retirados de metade do cubo C, digamos de $\varepsilon([0,1]^2 \times [0,1/2])$ (de novo com o jogo das viragens nos vértices): é apenas um pequeno cálculo (com uma subtileza por causa das viragens) que envolve ε e o comprimento total de S_1. Em seguida considere-se um segundo segmento S_2 que derive do primeiro e tal que cada ponto do Sol no complementar de A_1 diste de S_2 menos do que $1/2$ e prolongue-se A_1 por uma vizinhança cilindrica de S_2 construída de pequenos cilindros retirados de um quarto do cubo C, $\varepsilon([0,1]^2 \times [1/2, 1/4])$; o processo continua agora de forma idêntica: tendo-se construído $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ e as respectivas vizinhança abertas cilindricas, $A_1, ..., A_n$, deriva-se S_{n+1} de tal forma que todos os pontos do Sol no complementar de $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ distem menos do que $1/n+1$ de S_{n+1} e acrescentamos a $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ uma vizinhança aberta e cilindricade S_{n+1} construída de pequenos cilindros disjuntos retirados de $\varepsilon([0,1]^2 \times \left[1/2^n, 1/2^{n+1}\right])$. No final do processo infinito, temos que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ é um aberto denso do Sol e é claro, pelo próprio processo de construção, que pode ser decomposto em peças que cabem dentro da ervilha (na verdade dentro do cubo C). Em conclusão, o que o teorema de Dougherty e Foreman tem de extraordinário e belo é o facto de que as peças retiradas do Sol se ajustam também na ervilha para darem um aberto denso, coisa que esta nossa construção simples não produz, mas isso é uma questão à parte do que é realçado na citação, que é o facto das peças poderem caber ("fit"e não "fill") na ervilha e que seria o paralelo relevante para o paradoxo de Banach-Tarski. No entanto, esperamos ter demonstrado que esse facto em si mesmo não tem nada de extraordinário nem é paradoxal;[30] e assim podemos também consubstanciar a nossa crítica da característica **(iv)** do argumento típico, que dissemos que é retórica por inversão do onús da argumentação, inversão essa que se pode agora ver que não é justa: neste caso particular, sem o conhecimento dos lagos de Wada, ou de construções semelhantes, poderíamos permanecer na ilusão de que este exemplo é do mesmo tipo do Paradoxo o que, na nossa visão, não é o caso (em particular, os argumentos que avançaremos na segunda parte não se lhe aplicam, como veremos). Em conclusão, o Paradoxo deve ser argumentado nos seus próprios termos, pela crítica ou defesa directa daquilo que afirma, ou nega; é a nossa pequena contribuição para essa tarefa - que se afigura mais difícil - que segue agora na segunda parte.

3 "Eppur si muove..."

O modelo clássico do contínuo n-dimensional, com a sua aritmetização em termos de coordenadas (a partir da construção clássica dos reais) é talvez a idealização mais central às aplicações da matemática, em particular na física, e em especial nos aspectos mais geométricos desta (o conceito de *variedade* é prevalecente). Uma vez que o Paradoxo de Banach-Tarski parece contrariar fortemente intuições físicas que temos relativamente aos objectos tridimensionais do nosso espaço físico, fixemo-nos na análise das relações que existirão entre essas intuições - e as noções que lhes estão associadas - e as correspondentes noções matemáticas ligadas ao continuum e que estarão em jogo no Paradoxo.

Em mecânica e na física dos meios contínuos, temos a noção de *massa* de um corpo, $C \subset \mathbb{R}^3$, de *densidade* (massa por unidade de volume) - dada no caso contínuo, por alguma função densidade $\sigma : C \longrightarrow \mathbb{R}^+$ - e, relativamente a esta, a noção de *homogeneidade*, a noção de corpo homogéneo. Saliente-se que estas noções funcionam bem nos cálculos de aplicação prática: por exemplo, quando determinamos com algumas integrações o *centro de massa* de um corpo[31]

Pensemos numa esfera sólida, $P \subset \mathbb{R}^3$, de volume v, homogénea e de massa M e suponhamos que ela é equidecomponível com outra esfera S de volume $V = k\ v$, com, digamos, $k = 10^{100}$ (um ultra-

[30] Convém aqui notar, que nesta nossa construção também não usámos mais do que escolhas finitas ou numeráveis!

[31] A integração a este nível , envolve usualmente apenas o integral de Riemann e claramente não depende dos aspectos sofisticados de alguma teoria da medida.

finitista dirá talvez que é mais difícil pensar em tal esfera, se é que isso faz mesmo sentido). Sejam $P_1, ..., P_n$ os conjuntos da partição de P que rigidamente movidos e reajustados formam S e designemos os correspondentes subconjuntos de S, por $S_1, ..., S_n$. Ora, como já se viu, não podemos atribuir a todos os conjuntos P_i um *volume*, i.e., não podem ser todos mensuráveis. Mas do ponto de vista da nossa intuição física será muito díficil não aceitar que alguns deles têm massa e que as suas massas adicionadas darão a massa total M; não vemos como explicar a alguém que se pesar primeiro a esfera P, depois a cortar em n pedaços e os voltar a colocar no mesmo prato da balança o peso diminuiu, a não ser admitindo que alguma matéria se perdeu no processo e já não tenho a esfera toda[32]. Poder-se-á dizer que admitir que algumas das partes poderão ter massa 0 - o que é uma necessidade se, por exemplo tiverem volume 0, que é o caso de elementos geométricos elementares como linhas ou superfícies em P - também é fisicamente contra-intuitivo; mas neste caso, é possível explicar que este desajuste com a intuição física é o preço da idealização do continuum, mas que é útil, logo à partida por facilitar a descrição dos fenómenos físicos em termos desse continuum; esses conjuntos, como as noções de ponto, de linhas e de superfície são, do ponto de vista físico, idealizações que podem ser vistos como processos limite: a título de exemplo, se fracturar a esfera P em duas partes, que reajustadas a refazem plenamente, podemos pensar na superfície de fractura, que é um elemento matemático, geométrico e descritivo, mas que nada tem a ver com a integridade material da esfera que está mantida na reunião dessas duas partes. Mas pensar que - à parte a idealização de subconjuntos com massa 0 - a soma das massas das partes não somará a massa M, seria admitir que o modelo contínuo é um péssimo modelo dos objectos físicos. Sejam $P_1, ..., P_k$, $k \leq n$ as partes com massa (não-nula) e designemos as suas massas por $m_1, ..., m_k$, respectivamente: $M = m_1 + \cdots + m_k$.

Outra intuição física básica envolvida no paradoxo é a da integridade material e geométrica, i.e., de massa e de forma, ser preservada por isometrias (por alguma razão chamadas de *movimentos rígidos*[33]); há aqui um princípio ontológico envolvido: o de reconhecer como o *mesmo* objecto aquele que foi deslocado por um movimento rígido. Queremos, a propósito, deixar claro que não estamos aqui, de forma nenhuma, a ajuizar do valor do modelo contínuo clássico, relativamente aos problemas últimos (metafísicos) da natureza da realidade (física). A questão de saber se a análise clássica, com o seu continuum, será a mais adequada descrição da realidade física tem sido colocada; e.g., Richard Feynman, em Feynman (1967), levanta precisamente a questão da adequação da matemática que é usada em mecânica quântica, face ao problema dos infinitos que ocorrem em certos cálculos e da técnica matemática dita de "renormalização" (de que ele próprio é um dos criadores), que permite ultrapassar esses problemas mas que Feynman considera como que um truque, ou jogo técnico, que funciona mas não esclarece conceptualmente. O que interessa realçar é que Feynman questiona a adequação da matemática, até ao nível dos conceitos mais básicos da análise, ou dos conceitos de espaço contínuo de que essa análise será uma formalização:

> "On the other hand, I believe that the theory that space is continuous is wrong, because we get these infinities and other difficulties... I rather suspect that the simple ideas of geometry, extended down into infinitely small space, are wrong"

Maddy (1997) tem uma óptima discussão destas questões (pp. 146-157), em que argumenta, em particular com as opiniões de Feynman (mas também de outros físicos, incluindo Einstein) que:

> ...the status of some applications – like the use of continuous spacetime – are as yet unsettled, and that it could turn out that all applications of continuum mathematics in natural science are actually instances of idealization. So it isn't clear that responsible uses of indispensability – those which do recognize the subtleties involved – can currently be taken to warrant an ontological commitment to continuum mathematics.

[32] Esta observação de carácter didáctico é feita sobre o princípio que os matemáticos se devem preocupar em explicar e tornar inteligiveis, o mais possível, as suas noções e resultados...Ora algumas reacções a que temos assistido da parte de leigos - mas alguns deles com grande sofisticação intelectual e até científica - quando expostos ao Paradoxo, são muito pouco lisonjeiras para os matemáticos e a utilidade da suas "magias"!

[33] Estritamente, uma isometria é uma *função* de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, que preserva as distâncias (i.e., *rígida*) a palavra *movimento* vem do facto de que qualquer isometria que preserve a orientação (as que são obtidas por composição de rotações em torno de eixos - e que são as que entram no Paradoxo) é *isotópica* à função identidade, i.e. é o resultado final de um movimento contínuo e rígido do espaço em si mesmo (aliás já a palavra 'rotação' tem o significado usual de movimento)

Certos aspectos da natureza da realidade desvendados pela mecânica quântica, como emparelhamento, não localidade, etc., deixam espaço para interpretações idealistas (ou pró-idealistas) sobre os macro-objectos que nos rodeiam: poderemos, por exemplo, pensar que macro-objectos para nós distintos partilham partes, e que a sua natureza constitutiva muda com mudanças relativas das suas posições no espaço. Mas o que aqui estamos a assumir são as noções da matemática do espaço euclidiano clássico[34] e as suas aplicações primeiras e mais usuais; não vemos como seria possível conciliar a negação de que os movimentos rígidos preservam necessariamente massa e forma - eventualmente até bem justificada por alguma admissível interpretação e relativização física desses conceitos - com as aplicações mais usuais e práticas das isometrias (dos movimentos rígidos).

Continuando: admitimos, portanto que as partes $P_1, ..., P_n$ preservam as suas massas e formas no movimento de rearranjo para formar S, e que portanto a massa da esfera S será também $M = m_1 + \cdots m_k$ em que m_i é a massa da sua parte S_i. Como consequência temos que a *densidade* mudará, na passagem de P para S, e que a segunda esfera poderá já não ser homogénea. Notemos que há aqui algo que é também, aparentemente, contra-intuitivo: referimo-nos à intuição que se de um meio homogéneo retiro partes que depois são perfeitamente reajustadas, se mantém a homogeneidade e a respectiva densidade. A noção geral de densidade, geral no sentido de poder variar em função da variação (contínua) das coordenadas, está ligada a um processo limite: a densidade pontual, no ponto p, será definida como o $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} m(B)/V(B)$ em que B serão bolas centradas em p de raio ε a tender para 0 (ou outro tipo de regiões convenientes, em torno de p), e $m(B), V(B)$ a massa e volume respectivamente. Se virmos este processo em termos práticos, pensando no meio material como composto de um *número finito* de partículas e naquele limite como o que se obtém até uma certa aproximação de 0, então aquela intuição é apenas aparente, uma vez que neste caso se trata do corte e rearranjo de uma *malha finita* de partículas (pensando na malha como o factor rigidez) e sendo esta anisotrópica, não há razão para que se mantenha a densidade; se, por outro lado, pensarmos em termos do processo acabado e no objecto em questão como contínuo, então, dada a hipótese de homogeneidade, massa e volume confundem-se (a menos de um factor escalar) e estamos de volta à contra-intuição básica do Paradoxo. Aceitemos, por isso, que na segunda esfera, S, a densidade mudou e a homogeneidade se terá perdido.

Vejamos agora outras duas noções básicas e intuições que lhes estão associadas. A primeira é a noção de *simetria*: a esfera é perfeitamente simétrica, no sentido de que todas as rotações do espaço em torno de eixos pelo seu centro a deixam invariante; é mesmo o modelo da simetria perfeita no espaço. A segunda é uma ideia de regularidade estatística: imaginemos a experiência de lançar um dardo para a esfera P de forma aleatória, tanto na direcção escolhida para o lançamento como na intensidade e correspondente profundidade atingida pela ponta do dardo (a intensidade é tal que o dardo sempre atinge a esfera e nunca a trespassa). Dada a perfeita simetria da esfera a a sua homogeneidade é de supor que, nos sucessivos lançamentos, a distribuição da ponta do dardo pelas regiões P_i corresponda, i.e., seja proporcional às respectivas massas m_i; ou seja, que a probabilidade da ponta do dardo atingir a região P_i será m_i/M. Esta ideia é particularmente natural se pensarmos de novo no continuum como uma idealização limite de uma malha finita e regular (a regularidade a dar origem, no limite, por auto-semelhança, à homogeneidade) e virmos a massa de uma região como o número de vértices da malha nela contidos. Claro que estas ideias estão baseadas no que pode ser considerado como um tipo de crença sobre a regularidade do mundo físico, e pode-se facilmente contra-argumentar: primeiro, que não é justo falar em distribuição ou em probabilidades, já que não há volume, segundo, que uma eventual e hipotética experiência com lançamentos será sempre finita e mesmo que a distribuição comece a corresponder ao esperado, uma correlação forte com as massas, nada nos assegura que os futuros lançamentos mantenham esse padrão. Quanto à primeira objecção, responderemos que é um preconceito que deve ser discutido, a ideia de que a noção de probabilidade tem de estar associada à formalização matemática da ideia de volume. O que aqui afirmamos é que para as peças P_i, as massas m_i são, devido à homogeneidade de P, *um tipo de volume*, ainda que não matematicamente capturável: as peças serão geometricamente muito complicadas, de forma que não permite a sua aproximação por conjuntos geometricamente simples (i.e. com volume bem definido e em que a massa corresponda, dada a homogeneidade, a esse volume), isto

[34] Onde, ao contrário do continuum intuicionista, a identidade é bem determinada: Um ponto é um ponto é um ponto! A teoria dos conjuntos clássicos com o seu princípio de extensionalidade não lida com entidades difusas ou com identidade partilhada...

é a sua mensurabilidade; mas, como argumentámos, algumas delas têm de ter massa (positiva) e essas massas devem somar a massa total. Por outras palavras, nem todas as noções ou intuições que parecem essenciais à forma como o nosso pensamento se estrutura, têm formalizações adequadas em matemática, e algumas intuições sobre a relação entre massa e volume parecem constituir uma instância desse facto. Quanto à segunda objecção, responderemos que a inevitável finitude do que se testa efectivamente está subjacente a quase toda a prática científica (com, pelo menos, uma excepção bem conhecida: a da prática das áreas mais puras da matemática, onde que se inclui naturalmente o teorema da Banach-Tarski!) e muito em particular ao uso de métodos estatísticos que constituem uma parte essencial e central das aplicações da matemática: abandonar o seu uso por causa da impossibilidade de assegurar logicamente a infalibilidade das previsões, não pareceria sensato e, crença ou não, a ciência não seria possível sem a existência de padrões de regularidade, muitos dos quais só podem ser descobertos ou testados precisamente por métodos estatísticos; por fim, lembramos que a mesma objecção se coloca, de igual modo, quando usamos em aplicações, de carácter experimental, o conceito matematicamente legítimo (ou "legal") de probabilidade.

Admitimos portanto que a probabilidade da ponta do dardo atingir P_i é m_i/M ; mas note-se agora que pela noção de homogeneidade de P esta probabilidade só depende da *forma geométrica* de P_i em P: se substituirmos a esfera P por uma esfera P' com o mesmo volume, também homogénea, mas com massa diferente, $M' = \lambda M$, a noção de homogeneidade leva-nos a concluir que, em P', cada parte correspondente a P_i terá massa $m'_i = \lambda m_i$, e portanto a probabilidade de ser atingida pela ponta do dardo será $m'_i/M' = \lambda m_i/\lambda M = m_i/M$. Façamos agora o lançamento do dardo na esfera S, mais precisamente numa sua cópia homógenea: qual a probabilidade de atingir a região S_i obtida pela deslocação rígida de P_i? Ao deslocar a parte P_i, podemos fazê-lo acompanhando-a, também rigidamente, de uma cópia da esfera P que a contém: designemos por S_i^P a esfera correspondente que, no final do movimento, encerra a parte S_i, e que poderá ou não estar toda contida em S. A probabilidade de acertar com o dardo na intersecção $S_i^P \cap S$ será menor ou igual ao quociente entre o volume de S_i^P, que é igual ao volume v de P, e o volume de S que é, recorde-se, $V = kv$ ($k = 10^{100}$), ou seja, será menor ou igual a $1/k$. Como o par (S_i^P, S_i) é uma cópia exacta do par (P, P_i) e, como argumentámos, a probabilidade de acertar em P_i só dependia da sua forma geométrica em P, a probabilidade de tendo acertado em $S_i^P \cap S$ acertar em seguida em S_i é m_i/M ; então, a probabilidade, combinada, de acertar em S_i é menor ou igual ao produto das duas probabilidades, $(1/k)(m_i/M)$, e portanto a probabilidade de acertar em algum dos S_i é menor ou igual à soma $\sum_{i=1}^{n}(1/k)(m_i/M)$, que é igual a $1/k$ já que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = M$. Mas S é a união (disjunta) dos S_i, e portanto concluimos que a probabilidade de acertar em S é menor ou igual a $1/k = 1/10^{100}$, o que é um Paradoxo! [35]

A concluir, queremos deixar claro que não temos a pretensão de que o argumento que acabámos de desenvolver seja uma verdadeira explicação do Paradoxo, e menos ainda que seja considerado um argumento matemático,aceite por matemáticos treinados ("treinados"no sentido de uma citação anterior de Michael Potter). O que nos parece ser uma virtude do argumento, é que é *elementar*: poderia ser apresentado por alguém com conhecimentos de matemática não maiores do que os que constam de

[35] A ideia do lançamento de dardos veio de nos recordarmos do artigo de David Mumford (2000), *The Dawning of the Age of Stochasticity*, onde ele descreve (pp. 208) um resultado sobre a *hipótese do contínuo:*

> "...This leads us to the stunning result of Christopher Freiling (1986): using the idea of throwing darts, we can disprove the continuum hypothesis. Why his theorem os not universally known and considered on a par with the results of Gödel and Cohen, I do not Know. ...".

Segue-se a descrição do resultado e logo após David Mumford escreve o que, na nossa opinião, se adapta também a **AC** e aos argumentos que avançámos sobre o Paradoxo:

> "So what is 'wrong' with this? We have treated random variables, throws of the dart, as real things! If we try to rewrite this argument in classical measure theory, we will need to assume that the graph of the well-ordering is measurable, wich, of course, should not be done. So do we throw out the proof? Freiling used the argument to motivate a new axiom of set theory which disproves the continuum hypothesis. I believe we should go much further: his 'proof' shows that if we make random variables one of the basic elements of mathematics, it follows that the C.H. is false and we will get rid of one of the meaningless conundrums of set theory. The continuum hypothesis is surely similar to the sholastic issue of how many angels can stand on the head of a pin: an issue which disappears if you change your point of view."

muitos compêndios de matemática geral e aplicada para as engenharias ou outras ciências. Alguém a quem tendo sido explicado que há conjuntos que não são mensuráveis, no sentido (matemático) de que a sua "forma"não é capturável por aproximações sucessivas por regiões simples, ainda assim não abdica de outras noções intuitivas como as de massa, com a sua aditividade, e de homogeneidade e quer ver como essas noções se encaixam no problema. Como dissemos atrás, algumas intuições sobre a relação entre massa e volume parecem constituir uma instância do facto de que a matemática não consegue formalizar adequadamente todas as intuições e noções básicas, e as relações existentes entre elas, sobre as quais o nosso pensamento sobre o espaço físico se estrutura. Parece-nos que o que será útil numa resposta ao leigo que apresentou o argumento será tentar esclarecer as subtilezas das relações entre massa e volume; talvez também discutir, a propósito e directamente, em que medida os modelos contínuos da matemática clássica são eficazes ou são deficientes. Ele merece mais, em resposta, do que as ilusões e truques retóricos do argumento típico.

> *Uma vez que todos estes mistérios nos ultrapassam, finjamos ser os seus organizadores.*
> Jean Cocteau

Referências

Baggott, Jim (2004), *Beyond measure: Modern physics, philosophy, and the meaning of quantum theory*, Oxford University Press, 2004.

Banach, S. (1923), "Sur le problème de la measure", *Fund. Math.* 4 (1923), pp. 7-33.

Banach, S. & Tarski, A. (1924), "Sur la décomposition des ensembles de point en parties respectivement congruents", *Fund. Math.* 6 (1924), pp.244-277.

Diaconescu, R. (1975), "Axiom of choice and complementation", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 51, pp.175-178.

Dougherty, R. and Foreman, M. (1992), "The Banach-Tarski paradox using pieces with the property of Baire", *Proc. Nat. Acad. Sci.* 89 (1992).

Feynman, R. (1967), *The Character of Physical Law*, Cambridge, Mass. MIT Press.

Freiling, C. (1986), "Axioms of symmetry: throwing darts at the real line", *J. Symb. Logic*, 51, pp. 190-200.

Jech, Thomas J. (1973), *The Axiom of Choice*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 75, North-Holland Publishing Company, 1973.

Just, W. (1988), "A bounded paradoxical subset of the plane", *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 36 (1988), pp. 1-3.

Lindenbaum, A. (1926), "Contributions a l'étude de l'espace métrique I", *Fund. Math.* 8 (1926), pp.209-222.

Laczkovich, Miklós (1994), "Paradoxical Decompositions: A Survey of Recent Results", Joseph, A. et al (ed.), First European Congress of Mathematics (ECM), Paris, France, July 6-10. 1992. Volume II: Invited Lectures (Part 2). Basel: Birkhäuser. Prog.Math. 120. pp. 159-184 (1994).

Maddy, P. (1997), *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, 1997

Moore, G. H. (1982), *Zermelo's Axiom of Choice*, Springer-Verlag, 1982.

Mumford, D. (2000), "The Dawning of the Age of Stochasticity", in V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur (Editors), *Mathematics: Frontiers And Perspectives (International Mathematical Union)*, AMS (2000), pp. 197-218.

Potter, M. (2004), *Set Theory and its Philosophy - A Critical Introduction*, Oxford University Press, 2004.

Rêgo, E. F. (2007), "Intuicionismo e Teoria de Categorias/Topos - Tempo, Linguagens e Limites Cognitivos em Matemática". Notas para uma conferência no âmbito do VII Coloquio Compostelano de Lógica Y Filosofía Analítica, Santiago de Compostela, 29/3/2007.

Troelstra, A. S. & van Dalen, D. (1988), *Constructivism in Mathematics, An Introduction, Vol. I and II*, Amsterdam, North-Holland.

Wagon, Stan (1986), *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press (1986 – corrigido).

Eduardo Francisco Rêgo.
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA PURA E CMUP
FACULDADE DE CIENCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO.
Rua do Campo Alegre, 687 ; 4169-007 Porto - Portugal
(e-mail: eerego@fc.up.pt)m