



INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Séance publique du 2 octobre 2007

Notice nécrologique de Gustave Choquet
lue par Michel Talagrand

Gustave Choquet, né le 1^{er} mars 1915, est décédé à Lyon le 14 novembre 2006.

C'est avec une grande tristesse que j'ai accepté l'honneur de parler de sa vie et de son œuvre. Cette tâche sera considérablement facilitée d'une part par l'article qui lui est consacré dans le livre « Hommes de sciences » paru chez Hermann en 1990, et plus encore par la remarquable notice sur ses travaux scientifiques qu'il a rédigée en 1974, peu avant son élection dans notre compagnie.

Gustave Choquet est né à Solesmes, près de Valenciennes, et il passera toute son enfance dans cette région. Sa famille était de condition modeste, et rien ne le prédestinait à une carrière scientifique. Il eut la chance d'avoir à l'école primaire un instituteur très capable, M Flamant, passionné d'expérimentation, *un maître exceptionnel*, nous dit-il, *avec lequel j'ai observé plus de faits que dans tout mon séjour au lycée où à l'université. Je compris avec lui qu'un enseignant doit montrer les choses avant d'en parler.* Ce maître l'encourage à traduire en schémas géométriques les problèmes d'achat, de vente, de partage qu'il leur propose, conseil auquel il se plie avec la plus grande facilité, et qu'il appliquera toute sa vie, dans des situations que son instituteur n'avait certes pas anticipées.

Au lycée de Valenciennes, où il poursuit ses études, un camarade lui prête *en cachette* un « cours d'analyse et de mécanique » de l'École universelle. Fasciné par cette lecture, il décide si possible de se consacrer aux mathématiques. En classe de première et de mathématiques élémentaires, il devient un fanatique des problèmes de géométrie, qu'il analyse souvent de tête, sans l'aide de figures, et où il s'exerce déjà à dégager les structures essentielles de situations complexes. En classe de mathématiques élémentaires, un professeur dévoué, qui n'est d'ailleurs pas celui qui enseigne cette classe, lui donne quelques leçons particulières et le présente au Concours Général. Il y obtient le premier Prix. Le correcteur de sa copie de concours lui offre de passer directement dans sa classe de mathématiques spéciales au lycée Saint Louis, sans passer par la classe de spéciale préparatoire. Les dés sont jetés, il sera mathématicien. Autre coup de pouce du destin : il reçoit comme prix au concours général les œuvres de Darboux, et surtout les « Leçons sur la théorie des fonctions » de Baire, ouvrage

dans lequel il se sent immédiatement à l'aise et qui influencera son orientation mathématique future.

Gustave Choquet est admis à l'École Normale en 1934. La grande liberté scientifique qui y règne convient parfaitement à son tempérament. Il découvre à la bibliothèque la traduction du livre de Cantor sur le transfini et les leçons de Baire sur les fonctions discontinues pour lesquels il s'enthousiasme bien plus que pour les cours officiels.

Après l'agrégation, où il est reçu premier en 1937, il découvre la topologie générale dans un ouvrage de Caratheodory. Il forme alors son premier projet scientifique, l'étude exhaustive des fermés et des continus du plan. Sous les conseils de Georges Darmon, il contacte Arnaud Denjoy, dont la pensée exercera sur lui une influence considérable. Il bénéficie en 1938 d'une bourse à Princeton, où il découvre la logique, pour laquelle il forme un intérêt durable. Ce séjour est interrompu par la guerre. De 1941 à 1946 il est boursier du CNRS, ce qui lui permet de se consacrer entièrement à la recherche, dans des domaines assez variés. Il ne montre aucun empressement à rédiger sa thèse, et il ne s'y résout qu'en 1946, afin de pouvoir devenir professeur à l'Institut français de Pologne. À son retour, en 1947, il devient Maître de conférences à Grenoble, où commence une longue collaboration avec Marcel Brelot en théorie du potentiel à laquelle il s'est initié dès 1944 au séminaire d'Henri Cartan. Il est nommé ensuite Maître de conférences à Paris en 1949, puis Professeur en 1952. Il sera parallèlement Maître de conférences puis Professeur à l'École Polytechnique de 1960 à 1969, et fera des séjours de longue durée dans des universités étrangères.

Gustave Choquet laisse une œuvre scientifique considérable. Ses travaux sont marqués par une vision directe et géométrique des problèmes, et atteignent souvent à une suprême élégance. Il a manifesté une prédilection pour les problèmes clefs, problèmes qu'il a su reformuler dans le cadre le plus général possible et qui l'ont amené à la création de concepts nouveaux et pénétrants dont l'impact a été considérable. Il a abordé de nombreux domaines : topologie générale, fonctions de variables réelles, théorie de la mesure, théorie du potentiel, analyse fonctionnelle convexe et ses applications, théorie des nombres.

Ses premiers travaux sont publiés principalement sous forme de notes aux Comptes Rendus, dont il rédigera, hélas rarement !, les démonstrations, démonstrations qu'il avouera plus tard avoir parfois bien du mal à reconstituer. Ces travaux font déjà preuve d'une originalité remarquable. Par exemple, sa deuxième publication, sur les réseaux de routes, contient un algorithme sur les graphes qui ne sera redécouvert que 20 ans plus tard.

La thèse de Gustave Choquet est consacrée aux propriétés de différentiabilité des sous-ensembles des espaces Euclidiens. C'est là un domaine qui n'est plus à la mode, car les êtres que l'on étudie aujourd'hui sont soit très réguliers, comme les variétés différentiables, ou très généraux, comme les espaces compacts. Choquet résout plusieurs problèmes célèbres à l'époque en découvrant précisément des liens très profonds entre les structures différentiables et topologiques. Le résultat le plus connu de sa thèse, qui impressionna beaucoup, est la caractérisation des fonctions dérivées. Une fonction est, à un changement de variable continu près, une fonction dérivée si et seulement si elle est de première classe de Baire et si l'image de tout intervalle par cette fonction est un intervalle. Ce n'est toutefois pas le résultat le plus profond de sa thèse. Par exemple, il caractérise les courbes de l'espace euclidien qu'il est possible, au moyen d'un changement de variable continu, de munir d'une paramétrisation

différentiable et de dérivée non nulle en tout point. Sa thèse culmine dans un théorème abstrait d'énoncé très simple, le théorème dit du contingent-paratingent, et qui contient d'innombrables énoncés antérieurs. Ce théorème, dont il restera encore très fier cinquante ans après sa découverte, est sans doute le premier de ces éclairs fulgurants qui vont le rendre célèbre.

Avant de parler de ceux des travaux de Gustave Choquet qui font partie du patrimoine universel des mathématiques, il me semble nécessaire de lui laisser expliquer longuement la philosophie qui l'y a conduit.

Je suis un intuitif et un géomètre. Dès l'école primaire et le lycée, de tout problème mathématique j'essayais d'avoir une vision géométrique, de le traduire en figures simplifiées au maximum pour en dégager le squelette fonctionnel. Cette habitude m'a conduit à l'âge adulte, à adopter un style de recherche qui consistait, tout en m'appuyant sur une connaissance approfondie d'un ou plusieurs cas particuliers, à me placer dès que possible dans un cadre aussi général que possible où le problème ait encore un sens, quitte à le particulariser au fur et à mesure des besoins. Ceci me permettait tout à la fois de donner au problème la souplesse maximale et d'aboutir, si du moins je le résous, à la création d'outils mathématiques utilisables dans d'autres circonstances que celles qui les ont fait naître.

On peut dire qu'en mathématiques, comme à la guerre, il y a des stratèges et des tacticiens. Le stratège militaire a une certaine intuition de la façon dont il faut mener la campagne, une vision des grandes masses et de leurs relations mutuelles. Le tacticien colle au terrain, il a des connaissances techniques et un goût marqué pour le travail d'organisation. Je serais plutôt stratège, en ce sens que je vois les grandes masses et que je n'aime pas et ne parviens pas à accumuler des connaissances sur des techniques connues. Je dis parfois que je ne connais à fond aucune des parties des mathématiques, et c'est peut être parce que je n'ai pas de véritable spécialité que j'ai pu faire progresser plusieurs domaines des mathématiques.

Un objet central de la théorie du potentiel est le comportement de la capacité Newtonienne, définie pour un compact comme la plus grande charge électrique qu'il peut porter et qui ne crée en tout point qu'un potentiel au plus égal à 1. À partir de la capacité des compacts, on peut définir celle des ouverts, puis pour tout ensemble ses capacités extérieures et intérieures, comme on le fait en théorie de la mesure. En 1950 un problème central, celui de la capacitabilité des ensembles boréliens, est de savoir si pour ceux-ci les capacités extérieures et intérieures coïncident. Les propriétés de la capacité Newtonienne sont très différentes de celles d'une mesure. Que faire ? Fidèle à la philosophie qu'il nous a décrite, Gustave Choquet recherche dans un cadre très général pour quelles fonctions d'ensembles il serait concevable d'avoir un théorème de capacitabilité. Il découvre qu'il serait bien pratique que cette fonction d'ensemble vérifie certaines inégalités. Ces inégalités ne sont pas connues pour la capacité Newtonienne. Il les démontre, vérifiant ainsi, selon la terminologie qu'il crée, que cette fonction est une capacité alternée d'ordre infini. Il dira plus tard que cette découverte fût la plus grande émotion de sa carrière scientifique. Il procède ensuite à une investigation systématique des capacités, c'est-à-dire des fonctions croissantes d'ensembles ayant diverses propriétés permettant de démontrer un théorème de capacitabilité. La théorie qu'il construit est en un sens l'extension naturelle de la théorie de la mesure. Il expose ses résultats dans un puissant mémoire, qui demeure d'une étonnante jeunesse, et où sa théorie, de façon proprement extraordinaire, atteint dès la naissance sa forme finale. La théorie des capacités a reçu de multiples applications, à la théorie de la mesure, à la théorie des processus stochastiques et à

certains modèles d'économie. De plus, les nouvelles notions de topologie que Gustave Choquet a développées afin de ne pas restreindre sa théorie au cas métrisable donneront un nouvel essor à la théorie des ensembles Sousliniens. Ce travail demeure extrêmement cité, plus de 50 ans après sa parution. Littéralement des milliers d'articles d'économie utilisent de façon centrale la notion qu'ils appellent 'Choquet expected utility', une extension de la notion d'intégrale basée sur les capacités alternées d'ordre infini.

Voulant décrire toutes les capacités alternées d'ordre infini sur un ensemble compact donné, Gustave Choquet découvre qu'elles peuvent être représentées comme mélanges d'éléments simples, ceux qui sont des points extrémaux, et qui dans ce cas précis ont une structure particulièrement agréable. Il s'attaque alors au problème général, de savoir si dans un convexe compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe, tout point est nécessairement le barycentre d'une mesure de probabilité portée par les points extrémaux, ce que l'on appelle maintenant la représentation intégrale. Il réalise l'importance de considérer les ensembles compacts comme des bases de cônes convexes, et introduit une classe importante de convexes, ceux dont le cône associé est réticulé, et qui généralisent triangles et tétraèdres. Pour cette classe la représentation intégrale est nécessairement unique, ce sont les célèbres simplexes de Choquet. Dès 1956, il obtient l'existence de la représentation intégrale dans le cas métrisable. Dans le cas non métrisable, les pathologies sont inévitables, et quelques années supplémentaires sont nécessaires à l'obtention de résultats optimaux. La grande variété d'application de ces résultats (en théorie ergodique, algèbres d'opérateurs, processus stochastiques, théorie du potentiel, analyse harmonique) leur ont assuré un retentissement considérable. Plusieurs livres leur sont consacrés. Comme les plus grandes découvertes, le théorème de représentation intégrale de Choquet, une fois mis en évidence, est d'une limpidité absolue, et ceux qui n'ont pas connu l'époque qui l'a précédé ont bien du mal à comprendre qu'il n'ait pas été découvert une génération plus tôt, tant il semble faire partie de l'ordre intrinsèque de l'univers.

Gustave Choquet a élargi l'idée de représentation intégrale du cadre des ensembles convexes compacts à celui de cônes convexes beaucoup plus généraux, grâce à la notion de mesure conique ; ces résultats sont exposés, ainsi que la plupart de ses contributions à l'analyse fonctionnelle linéaire dans son ouvrage en trois volumes, *Lectures on Analysis* (chez Benjamin). Cet ouvrage remarquable, tant par la profondeur des résultats que par la limpidité des énoncés et de leurs démonstrations, demeure très lu et très cité aujourd'hui.

Gustave Choquet n'a pas seulement puisé dans la théorie du potentiel l'inspiration qui anime ses meilleurs travaux, il y a apporté des contributions de premier ordre. Ses recherches conduites avec J. Deny sur les noyaux de convolution ont des applications importantes dans la théorie des marches aléatoires sur les groupes ; elles sont elles-mêmes basées sur des idées géométriques et des outils d'analyse fonctionnelle.

Gustave Choquet a fondé et animé deux séminaires, toujours très vivants, qui ont eu une influence considérable, le séminaire d'Initiation à l'analyse, et le séminaire de Théorie du potentiel. Il a dirigé de nombreuses thèses. Il prenait grand soin de ses étudiants, guidant leurs premiers pas, sans jamais leur imposer un sujet de recherches, mais en leur en fournissant un lorsqu'ils le désiraient vraiment. Il essayait de leur communiquer sa philosophie de la

recherche, telle qu'il nous l'a exposée plus haut, tout en sachant bien qu'il n'est pas donné à tous de découvrir des outils universels. J'ai eu la chance d'assister, il y a bien longtemps à une interview de Gustave Choquet par un de nos collègues mathématicien. Celui-ci lui a demandé de conclure l'interview par quelques conseils pratiques. Gustave Choquet en a proposé deux :

- il est souvent utile de considérer un espace produit.
- il faut toujours penser à considérer l'enveloppe convexe.

Sans doute plaisantait-il à moitié en disant ceci, mais il est probable que je ne serai pas en train de lui rendre hommage ici si je n'avais pas suivi moi-même ces conseils.

Gustave Choquet a été non seulement le créateur d'une œuvre mathématique vaste et profonde, mais aussi un enseignant hors pair. En 1953, le cours de calcul différentiel et intégral de l'université de Paris est toujours enseigné par l'école « d'analyse à la française », suivant le célèbre traité de Goursat, qui faisait bien peu de part aux mathématiques du 20^e siècle. Quand George Valiron, malade, ne peut plus assurer ce cours, Henri Cartan, conscient du bouleversement qu'il va déclencher, propose Gustave Choquet pour le remplacer à l'automne 1954. Celui-ci modifie résolument le contenu et l'orientation de ce cours, introduisant la construction des nombres réels, les espaces topologiques, les espaces de Hilbert, au grand désarroi d'ailleurs des redoublants effarés par la métamorphose du sujet. Le mouvement déclenché fut irrésistible, et très rapidement toutes les universités françaises adoptèrent le programme de Gustave Choquet.

Les cours de Gustave Choquet s'appuyaient sur une théorie pédagogique clairement revendiquée. Il s'est souvent exprimé à ce sujet, aussi laissons lui encore la parole.

Nous succombons indéfiniment au mirage des programmes soigneusement mis au point, et nous pensons, surtout à l'université, qu'un cours bien structuré sur un programme modernisé est le but final de notre pédagogie. Le professeur prépare avec conscience un beau cours, rigoureux et limpide comme l'eau d'une source et s'étonne lors de l'examen que cette eau se soit muée en un liquide trouble peu appétissant.

L'âge des étudiants n'excuse pas l'exposé stérilisé de théories dont l'intérêt n'est pas toujours apparent.

On apprend à faire des maths non pas en écoutant une leçon purifiée, mais en manipulant des êtres mathématiques.

L'important n'est pas la somme de travail fournie par le professeur, mais celle fournie par l'étudiant. Autrement dit l'essentiel n'est pas le cours, mais le travail personnel de l'étudiant. Il faut donc que d'une façon ou d'une autre, le professeur provoque cet effort personnel.

J'ai eu la chance d'assister moi-même à plusieurs de ses cours de troisième cycle, constitués bien sûr en très grande partie de ses travaux personnels, ce qui en faisait tout l'intérêt. Ces cours étaient limpides sans être nullement des exposés stériles. L'étudiant que j'étais encore, fut très impressionné par le fait qu'il ne s'aidait pour les donner que de quelques lignes d'aide-mémoire souvent rédigées sur le dos d'une enveloppe pendant le trajet en RER qui l'amenait à Jussieu.

Gustave Choquet a été un remarquable rédacteur de manuels. Les photocopiés de son cours de Calcul différentiel et intégral ont enthousiasmé des générations d'étudiants. Ces textes, écrits

en 1955, sont d'une étonnante modernité. Ils ont été repris dans son cours d'analyse édité par Masson qui est toujours utilisé par de nombreux enseignants.

Gustave Choquet s'est intéressé à la pédagogie dans un cadre bien plus général que celui de l'enseignement supérieur, et où il est d'ailleurs autrement plus difficile d'avoir un impact. Cela s'est traduit notamment par sa présidence (de 1950 à 1962) de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (Commission Gattegno), laquelle a organisé de multiples colloques internationaux. Gustave Choquet s'est plus particulièrement intéressé à l'enseignement de la géométrie élémentaire. Il accepte mal le flou qui règne au début des cours géométrie, flou qui contraste tristement avec la rigueur que l'on y rencontre par la suite. Laissons-lui la parole, dans un article de 1954 :

La géométrie élémentaire est un beau voyage, mais son départ a souvent lieu dans une ombre douteuse et son chemin traverse des bourbiers profonds, tels celui des déplacements et celui de l'orientation.

Voici un exemple de commentaire d'un manuel sur les axiomes et les postulats : Un axiome est une proposition évidente par elle-même. Un postulat est une proposition que l'on admet sans démonstration. Mieux vaut le silence qu'un tel commentaire qui risque d'obscurcir pour longtemps l'esprit de l'élève.

N'est-il pas stupéfiant que de telles absurdités n'aient paru gêner que très peu de gens ? Choquet nous montre en 1961 dans un livre que plusieurs axiomatiques complètes de la géométrie élémentaires sont possibles et accessibles. Ses idées nous interpellent toujours, mais elles n'ont eu, comme c'était à craindre, que peu d'impact pratique.

Gustave Choquet a reçu le Prix Pécot du Collège de France. Il a reçu les Prix Houlléviq (1946), Dickson (1951), Carrière (1956) et le Grand Prix des sciences mathématiques (1968) de l'Académie des sciences, où il a été élu Membre le 29 novembre 1976 dans la section Mathématiques.

Personnalité marquante, très attachante, adoré de ses étudiants, son immense talent n'avait d'égal que son charisme personnel. Ses travaux ont profondément marqué l'extraordinaire développement de l'analyse mathématique au cours de la deuxième moitié du vingtième siècle. Il a renouvelé la discipline et son influence dans l'enseignement des mathématiques continue de toucher de nombreuses générations.